Gabai's 4D Light Bulb Theorem

山田 裕一　Yuichi YAMADA　（電気通信大学）*

2019 年 2 月

概 要

このノートは、研究集会「微分トポロジー１９」での講演「4-dimensional light bulb theorem by Gabai II」参考資料とするために作成しました．Gabai の論文 [G] の紹介です．

This particle is written down for the Workshop "Differential Topology 19"(March 2019, Tokyo). I give a talk on the paper [G] by D. Gabai.

1　準備

目標とするのは次の定理だった．

Theorem 1.2 *Let M be an orientable 4-manifold such that $\pi_1(M)$ has no 2-torsion. Two embedded 2-spheres with common transverse sphere G are homotopic if and only if they are ambiently isotopic.*

一方，出発点となる Smale の定理は

定理 4.1 [Smale (1957)] ：向き付け可能な４次元多様体 M への S^2 の埋め込みに関して, homotopic ならば regular homotopic.

（さらに考察すると）generic な regular isotopy と 有限個の finger move, Whitney move からなる．

証明のアイデアを紹介する前に, 前提となることをいくつか紹介する．

(0) ４次元多様体の中の曲面 A を扱うにあたって, 原論文では Motion picture と そうでない図が "うまく" 組み合わされている．１つの図に両方が使われることもある．

(1) ４次元多様体 M^4 に曲面 A^2 が埋め込まれており, さらに A の中に曲線 c^1 が埋め込まれているとき（$M^4 \supset A^2 \supset c^1$），「$c$ を軸とする A と平行な Tube ($T(c)$)」が定まる．

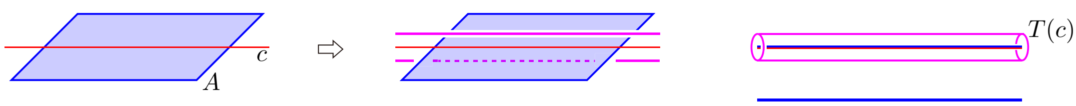


Fig.1：$M \supset A \supset c$ からの Tube $T(c)$ （右図は Motion picture を利用）

(2) ４次元多様体 M^4 内の曲線 c に対し, 両端点での円板 $(\partial c) \times D^2$ を固定して，「c を軸にもつ Tube（$c \times D^2$ あるいは $c \times S^1$）」を指定するには framing が必要である．$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ なので, 選択は２通り．M 内の曲線には framing を指定して framed curve と呼ぶ．

*The author was supported by KAKENHI (Grant-in-Aid for Scientific Research) No. 16K05143

2 定理・定義

定義 5.5 と構成 5.7 は同時に理解するしかない．概要は, tube の軸の位置関係を印した状態

定義 5.5：*A tubed surface* $\mathcal{A}$ in M は次のもの達から成る．

「弧 $\sigma : x \sim y \subset X$」と書いたら「曲面 X 内の２点 x, y をつなぐ immersed 弧 σ」の意味.
　曲面 A_0 内で, 弧の配置は generic（交点は２重点以下）で, 交点は（結び目図式のように）上下情報をもつ.（$\Rightarrow$ ７章に 交差交換の補題）

(i) generic で 自己横断的 な immersion $f : A_0 \looparrowright M$, ここで
・A_0 は閉曲面「underlying surface」で基点 z_0,
・ 像 $A_1 = f(A_0)$「associated surface」
・A_1 の２重点が n 個．f による逆像を (x_i, y_i)（$x_i, y_i \in A_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$）とおく

(ii) M 内で, $A_1 = f(A_0)$ と横断球面 (transverse sphere) G は 点 $z = f(z_0)$ で交叉.

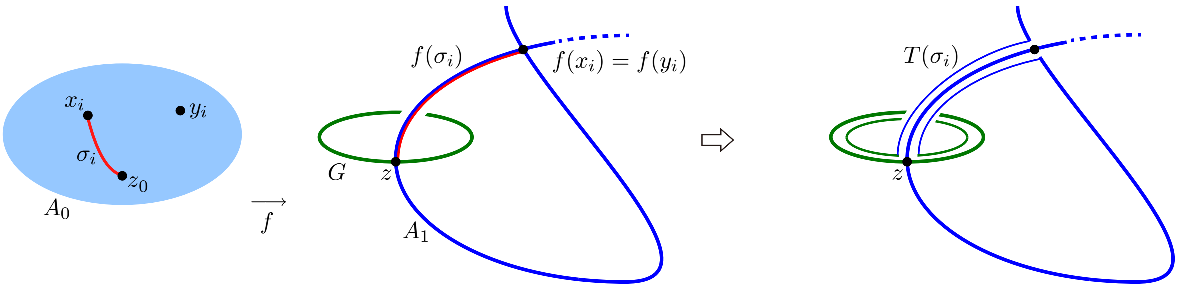
(iii) 各 i に対して 弧 $\sigma_i : z_0 \sim x_i \subset A_0$（$i = 1, 2, \ldots, n$）

(iv) ・r 個の閉じた弧 α_j：$z_0 \in \alpha_j \subset A_0$（$j = 1, 2, \ldots, r$）
・α_j 上の点 p_j と A_0 上の点 q_j の組 (p_j, q_j)
・M 内の弧 $\tau_j : f(p_j) \sim f(q_j) \subset M$. ただし $\mathrm{int}(\tau_j) \subset M \backslash (A_1 \cup G)$.
　（α_j を *single tube* という.（τ_j ではなくて)）

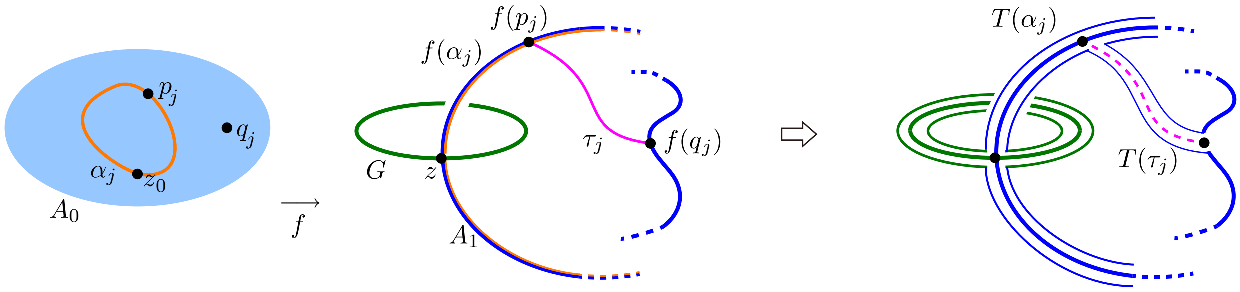
(v) ・s 個の弧の対 (β_k, γ_k)（$k = 1, 2, \ldots, s$）
・弧 $\beta_k : z_0 \sim b_k \subset A_0$，弧 $\gamma_k : z_0 \sim g_k \subset A_0$
・M 内の弧 $\lambda_k : f(b_k) \sim f(g_k) \subset M$. ただし $\mathrm{int}(\lambda_k) \subset M \backslash (A_1 \cup G)$.
　（λ_k を *double tube* という．幾何的には Hopf link$\times[0, 1]$.）

総称「tube guide curves」弧 σ_i，α_j，β_k，$\gamma_k \quad \subset A_0$.
総称「framed tube guide curves」弧 τ_j，$\lambda_k \quad \subset M$
いずれも tube の軸になる.

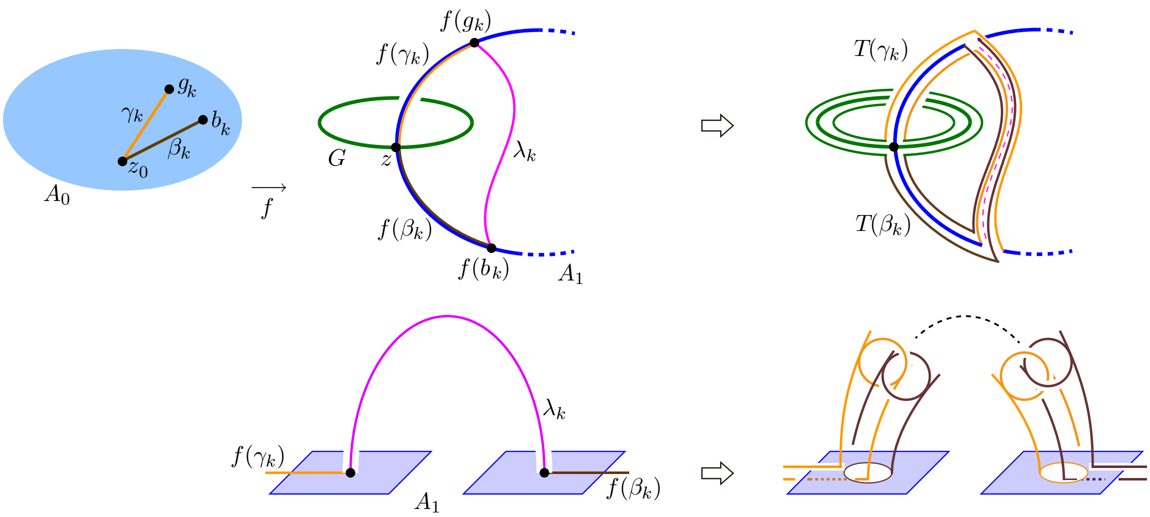
構成 5.7：*A tubed surface* $\mathcal{A}$ の実現 (realization) in M
概要は, 指定された軸に沿って tube を実現した状態．図で説明する.



(iii) 点 x_i, y_i ：弧 σ_i



(iv) 点 p_j, q_j ：弧 α_j, framed τ_j ($\Rightarrow$ single tube)



(v) 点 b_k, g_k ：弧 β_k, γ_k, framed λ_k ($\Rightarrow$ double tube)

Fig.2 : Tubed surface とその実現（概念図）

定義 5.23：A tubed surface $\mathcal{A}$ が *Normal form* とは, 以下の条件を満たすもの

(a) 曲面 $f: A_0 \to A_1 \subset M$ が embedding.

(b) 弧 α_j が存在しない $(r=0)$.

(c) 弧 β_k, γ_k 達が embedded で, 基点 z_0 を中心として放射状に（反時計回りに）

$$\beta_1, \gamma_1,\ \beta_2, \gamma_2,\ \ldots,\ \beta_s, \gamma_s$$

と順序正しく並ぶ

(d) 弧 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ は, $\pi_1 M$ の互いに異なる 位数 2 以下の元 となる.

定義を述べたので, もう 1 つの定理をコピーしておく.

Theorem 1.3 *Let M be an orientable 4-manifold and R_1, R_0 be embedded spheres which coincide near the common transverse sphere G. Then R_1 can be put into a normal form with respect to R_0 via an isotopy fixing a neighborhood of G pointwise.*

いよいよ, 証明の手法に進む

定義 5.9：Tubed surface $\mathcal{A}$ に対する, 以下のような変形を *tube sliding moves* という.

(i) 曲面 A_0 での, 孤の ライデマイスター変形 RII, RIII.

(ii) 基点 z_0 の周りでの, 孤の順序交換

(iii) Tube guide curve が 2 重点 (y_i) を超える スライド.
ただし, σ_i が y_i を超えるのは禁則.

(iv) Tube guide curve が double tube の端点を超える スライド.
ただし, γ_k が b_k を あるいは β_k が g_k を超えるのは禁則.

(v) Tube guide curve が single tube の端点を超える スライド.
ただし, α_j が p_j または q_j を超えるのは禁則.

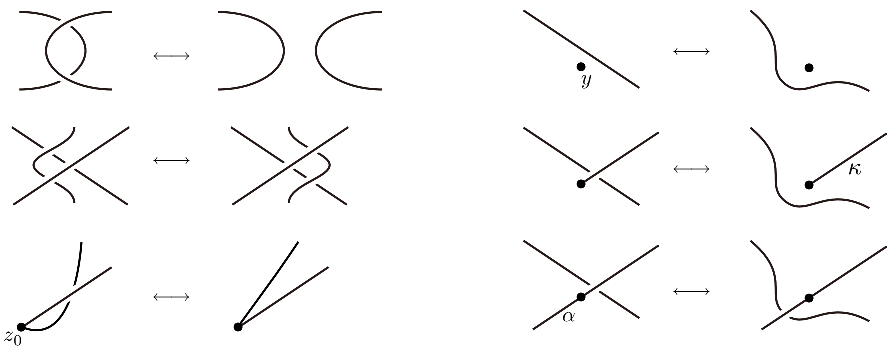


Fig.3：Tube Sliding Move　(κ は $\sigma_i, \beta_k, \gamma_k$ のいずれか)

定義 5.18：Tubed surface $\mathcal{A}$ に対する *elementary tubed surface isotopy* は, 次のものから成る.

(a) Combinatorial を変えない smooth change.

(b) Tube sliding moves （定義 5.9）

(c) Finger moves

(d) Tube locus free な（Whitney disk が framed tube guide curves と交わらない）
Whitney moves

定理 5.19. Tubed surfaces $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ が elementary tubed surface isotopy で移りあうならば, それらの実現は isotopic.

証明：局所変形なので, local 座標などで 証明できる. □

ここで一旦, 復習したい. 定理 5.19 の証明のうち (c) finger move の基礎は次の補題であった.

補題 5.1.
設定：４次元多様体 M 内に埋め込まれた連結な曲面 R が横断球面 G をもつとする.
R に finger move を施したものを R_1 とするとき, R_1 に G の平行球面２枚を tube して, 生成された２交点を消したもの (R_2) は R と isotopic.

もし, 定義 5.18(c) と定理 5.19 を読んで, 疑問

「R に finger move を施した R_1 は, 自己交点が
２個増えるので, isotopy では移り合わないはず」

こう思ったなら誤解がある. 定理 5.19 と補題 5.1 の文面の違いと「実現」の定義を, もう一度読み直してほしい. Tubed surface は実現する前の曲面で，いわば管の位置関係の情報を弧で印した状態.

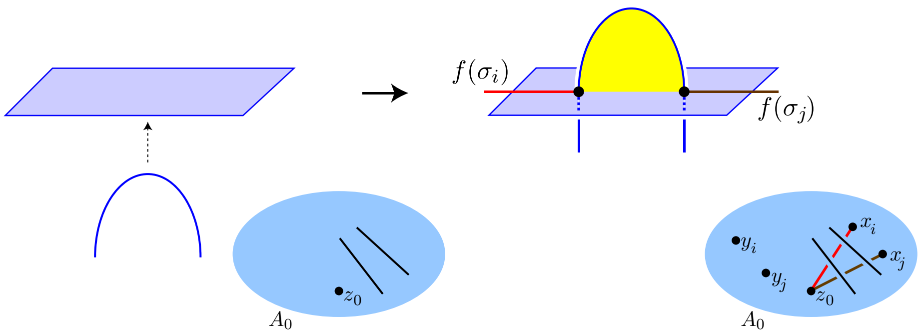


Fig.4：Finger move に伴う Tubed surface の変形

定理 5.19 に戻る. (d) Whitney move には２種類ある. [uncrossed と crossed]
Tubed surface に Whitney move を施すとき, 解消される異符号の自己交点の逆像をそれぞれ $\{x_i, y_i\}$ と $\{x_{i'}, y_{i'}\}$ とする $(f(x_i) = f(y_i), f(x_{i'}) = f(y_{i'}))$. このとき, tubed surface としては x_i と基点 z_0 が弧 σ_i で繋がれており, $x_{i'}$ も同様. Whitney disk の近傍の曲面の２成分に注目し, x_i と $x_{i'}$ が同一成分の場合が uncrossed, 異なる成分の場合が crossed. uncrossed の場合は single tube が, crossed の場合は double tube が move 後に現れる.

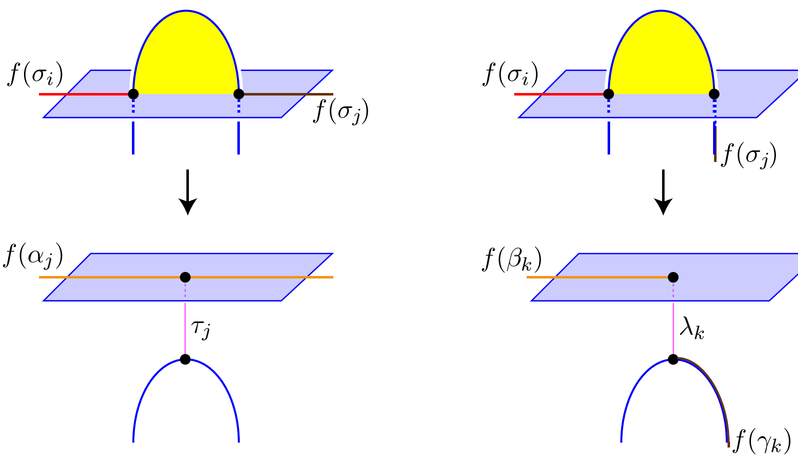


Fig.5：Whitney disk の uncrossed（左） と crossed（右）

定義 5.20："A regular homotopy f_t is *shadowed* by tubed surfaces"
設定：４次元多様体 M 内に はめ込まれた曲面 R_0 が横断球面 G をもつとする．

Immersed 曲面 R_0 の, G から離れた台をもつ generic regular homotopy $f_t : R \to M$ が, 有限個の $\{t_i\}$ 以外では自己横断的で, $(t_i, t_{i+1}) \ni s$ に対する $f_s(R)$ を R_i とする：$R_i = f_s(R)$,

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 = t_0 & < & t_1 & < & t_2 & < & t_3 & < & \cdots & < & t_m = 1 \\ R_0 = & R_0 & & R_1 & & R_2 & & R_3 & \cdots & R_m & = f_1(R) \\ & \mathcal{R}_0 & & \mathcal{R}_1 & & \mathcal{R}_2 & & \mathcal{R}_3 & \cdots & \mathcal{R}_m & \end{array}$$

このとき, tubed surface $\mathcal{R}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ が存在して
・R_i は $\mathcal{R}_i$ の associated surface.
・$\mathcal{R}_{i+1}$ は $\mathcal{R}_i$ の elementary tubed surface isotopy （主に finger move か Whitney move）
が成り立つとき「f_t is *shadowed* by tubed surfaces」という．

定理 5.21. If $f_t : A_0 \to M$ is a generic regular homotopy with $f_0(A_0)$ an embedded surface, M a smooth 4-manifold, G a transverse embedded sphere, and f_t is supported away from G, then f_t is shadowed by tubed surfaces.

3　６章（代数）と７章（幾何）

６章では, Tubed surface の代数について議論が進む．

Tubed surface A の各 framed curve κ（τ_j か λ_k のどれか）は，実現によって G の平行球面 G' につなぐ管 $T(\kappa)$ に変わる．$P(\kappa) = T(\kappa) \cup G'$ とする[1]．まず, $P(\kappa)$ の向き・符号を精密に定める：例えば $\{\beta_k, \gamma_k\}$ と λ からなるループには $z_0 \overset{\beta_k}{\sim} b_k \overset{\lambda_k}{\sim} g_k \overset{\gamma_k}{\sim} z_0$ の順に周る向き, $P(\kappa)$ の向きは, guide curve の基点 z_0 でない方の端点 の付近での曲面の向き で定める．

目標は, Tube を実現したときの $[A_1] \in \pi_2(M)$ からの変化であり, 結論は次の式

$$[A_1{}'] - [A_1] = \sum_{k=1}^{s} \left([G][\lambda_k] - [G][\lambda_k]^{-1} \right) \qquad \in \pi_2 M$$

ここで, $[\lambda_k]$ は framed curve λ_k のなす $\pi_1 M = \pi_1(M \backslash A)$ の元であり, $\pi_2 M$ への $\pi_1 M$ の作用を右から書いている．なお $[G] \in \pi_2 M$ は, 当然, 非自明である．

A_1 が $A_1{}'$ と homotopic なら式の両辺は消えるはず．そのためには $[\lambda_k] = [\lambda_k]^{-1}$ $(\in \pi_1 M)$, つまり 2-Tor の元 以外は, λ_k 達が, それぞれ $[\lambda_{k'}] = [\lambda_k]^{-1}$ の対となって消滅する必要がある．この対が framing などによらずに, 必ず対消滅できることが, 幾何的に示されている．

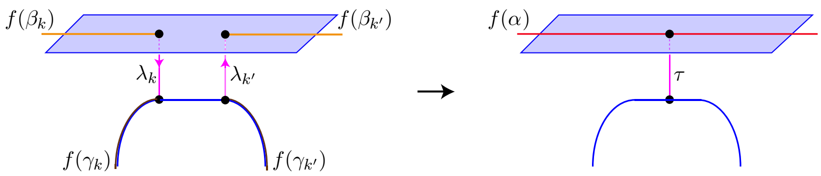


Fig.6：$[\lambda_k] = [\lambda_k]^{-1}$ のとき, 対で single tube に変形し, 消滅

命題 6.9.　４次元多様体 M 内の tubed surface $\mathcal{A}$ の asssoiated surface A_1 が横断球面 (transverse sphere) をもつ球面の埋め込みであり, $\mathcal{A}$ の実現 A と homotopic であったとする．このとき, 次を満たす tubed surface $\mathcal{A}'$ と, G から離れた台をもつ A の isotopy が存在する．

[1] $P(\kappa)$ の形が Light Bulb ではないか！

・$\mathcal{A}'$ の asssoiated surface は A_1 で, $\mathcal{A}'$ の実現は A のまま，　かつ
［$\pi_1 M$ に 2-Tor がない場合］double tube は高々 1 つだけで, $\pi_1 M$ の元として 0 (null-homotopic).
［$\pi_1 M$ に 2-Tor がある場合］double tube は 高々 2-Tor($\pi_1 M$) の位数 2 の元の個数 以下.

７章では, 次の補題が証明される[2].

補題 7.1：［交差交換の補題］
４次元多様体 M 内で tubed surface $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ が
・球面上で, 異なる tube guide curves 弧 あるいは 弧 $\alpha_j \backslash p_j$ の異なる成分
の交差交換で得られるとき, それらの実現 A, A' は G から離れた台をもつ isotopy で移り合う.
（$\mathcal{A}$ の Associated surface A_1 が transverse sphere をもつことは仮定）

証明の手法は Motion Picture. しかも, 用法として真骨頂．ここでも横断球面 G を使う（G と平行な $S^2 \times I$ をとり，２枚の $S^2 = S^2 \times \partial I$ を使う)．原論文の図 7.2 は とても完成度の高い図で, これをわかりやすくする技量は, わたくしにはありません.

この補題により, 曲面上での tube guide curves ($\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ 達) が "絡む" 問題は生じない.
証明の最後は 弧 α 達（single tubes）の消去．交差交換で曲面を単純にする過程で, framed curves τ が一旦複雑になるが, それらも結局 解けて $P(\tau)$ が ただの "コブ" になり，消去される.
□

参考文献

[G] D. Gabai, *The 4-dimensional light bulb thoerem*, preprint Arxiv: `math.GT/1705.09989`.

[2] この補題の内容も Light Bulb Theorem に思える

わたくしにとっての Light Bulb Theorem.

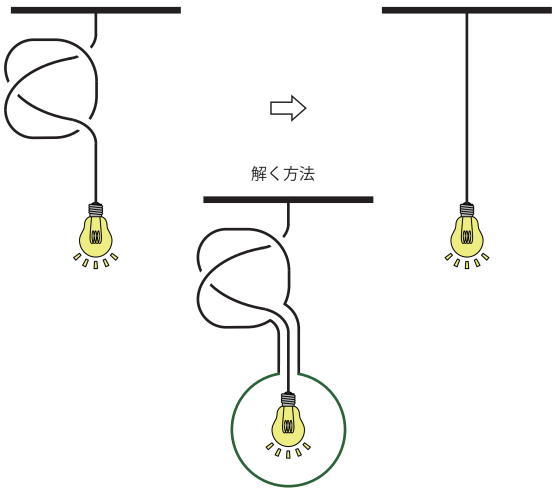


図 1: Light Bulb Theorem

電球の位置を固定したまま，コードだけを動かすことで解ける.