

双曲デー手術定理に向けて

安部哲哉

ABSTRACT. このノートの目的は「双曲デー手術定理を理解したい」と思わせることである。

1. 導入

以下では、3次元球面 S^3 内の結び目のみを考察する。**双曲結び目** $K \subset S^3$ とは、 $S^3 \setminus K$ が完備かつ有限体積な双曲構造を許容する結び目のことである¹。Thurston の双曲デー手術定理とは、次のものである。

定理 1.1. K を双曲結び目とする。高々有限個の手術を除いて、 K に沿った r -手術は3次元双曲多様体となる。

Thurston の双曲デー手術定理に関する基本的な文献は、Thurston 自身による講義録 [4] である²。講義録の概要は、例えば著書 [1] の4章に書かれている。双曲デー手術理論については、著書 [1] の3章に概説がある。関連する文献や教科書は沢山あるが、ここでは言及しない。

双曲デー手術定理の勉強は、figure-eight 結び目 4_1 の補空間を調べることから始まる。具体的には

- (1) $S^3 \setminus 4_1$ が2つの理想四面体の貼り合わせであること。
- (2) $S^3 \setminus 4_1$ が (完備とは限らない、たくさんの) 双曲構造を持つこと。
- (3) どの $S^3 \setminus 4_1$ の双曲構造が完備であるかを調べること。
- (4) 完備ではない $S^3 \setminus 4_1$ の双曲構造と、 4_1 の双曲デー手術との関係。

を学ぶことになる。昔、私が双曲デー手術定理を勉強しようとしたときは (双曲幾何学の知識を必要としない) (1) で挫折した (講義録 [4] の Chapter 1 の内容)。従って (2), (3), (4) も勉強しなかった。次のセクションで (1) の概説をする³。

講義録 [4] の Chapter 1 の概要：いくつかの3次元多様体の構成方法 (Dehn 手術、分岐被覆、ヒーガード分解、四面体の貼り合わせ等) が紹介されている。(理想) 四面体の貼り合わせの具体例として、 $S^3 \setminus 4_1$ が紹介されている。

Date: March 18, 2022.

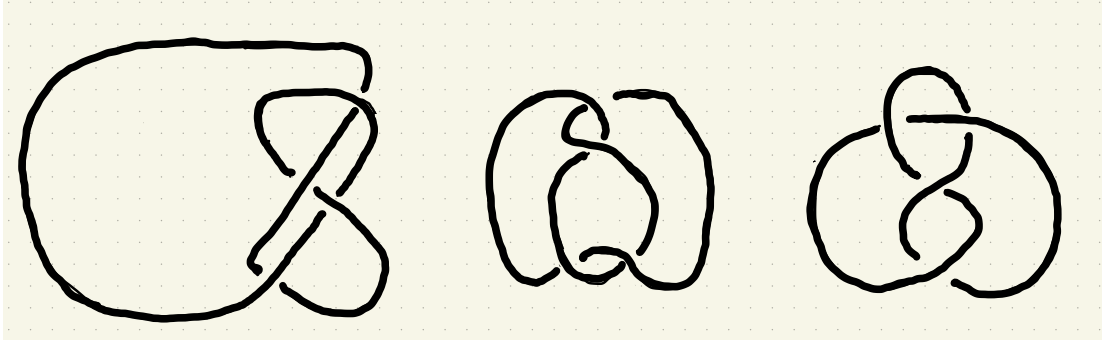
¹追記 (3/18)：自明な結び目の補空間は完備で無限体積の双曲構造を持つ。

²講義録の一部は、Thurston により加筆されて著書 [5] になっているが、いまだに基本的な文献は [4] のようである。

³時間の都合で、まだ (1) の概説しか書いていません。

2. 補空間 $S^3 \setminus 4_1$ について

8の字結び目とは下図のものである。3つの結び目が書かれているが、全てイソトピックであることが（手を動かせば）わかる。「Knot table (結び目のリスト)」では 4_1 と書かれる。

FIGURE 1. 8の字結び目 4_1

次の2つの四面体を考える。 M を四面体を貼り合わせて得られたものとする。ただし、「矢印の種類」と「矢印の向き」が一致するように、面を貼り合わせる。

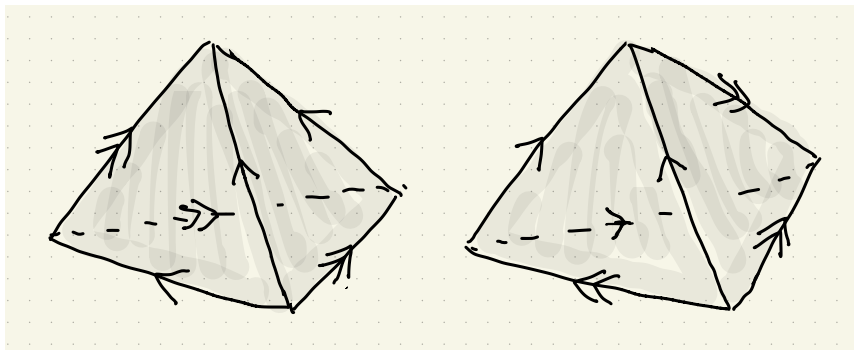


FIGURE 2. 2つの四面体

M はセル複体となる。一方、 M は多様体にならない。まず、元々の四面体の全ての頂点は、同一視により一つの頂点 $v \in M$ となることに注意する（貼り合わせの仕方に注意すれば、こうなることが確認できる）。さらに、 M の頂点 v の近傍はトーラスの cone になることがわかる（ここでは説明しない）。従って、 M は多様体にならない。しかし、 $M \setminus \{v\}$ は多様体であり、次が成り立つ。

定理 2.1. $M \setminus \{v\}$ は $S^3 \setminus 4_1$ と同相である。

Matsuzaki-Taniguchi の著書「Hyperbolic Manifolds and Kleinian Groups」の p34 では、 $M \setminus \{v\}$ を $S^3 \setminus 4_1$ に変形する方法（図）が紹介されている（やや難解）。Google Books から閲覧可能である。

ここでは、講義録 [4] の Chapter 1 の方法を紹介する。つまり、 $S^3 \setminus 4_1$ から、2つの四面体を構成し、その貼り合わせが上のものと一致することを確認する。ただし、詳細は Lackenby の講義録 [3] に従う。

証明. まず、次の S^3 に埋め込まれたグラフを考える。「なぜこのグラフを考えるのか？」は考察しない) 後の都合で辺に「向き」と「番号」をつける。これらは、適当に与えた。

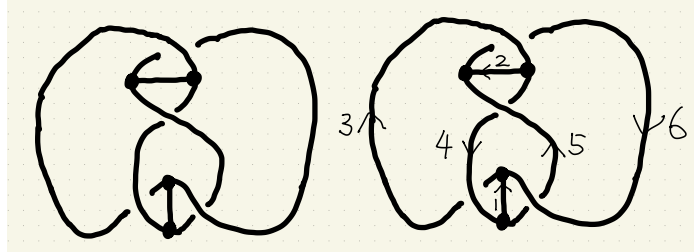


FIGURE 3. S^3 に埋め込まれたグラフ

このグラフに4つの2セルを下図のように貼り付ける。 S^3 内に埋め込まれた2セルを A, B, C, D と名付ける。得られた2次元セル複体を K と置く。

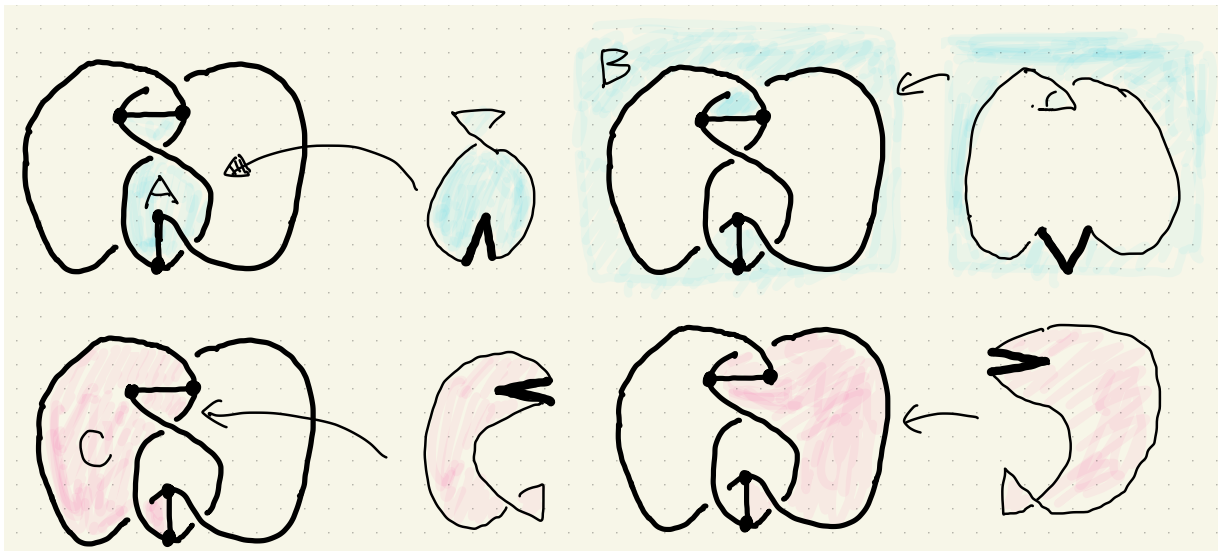


FIGURE 4. 2セルの接着

セル複体 K を上から見ると次のようになる。

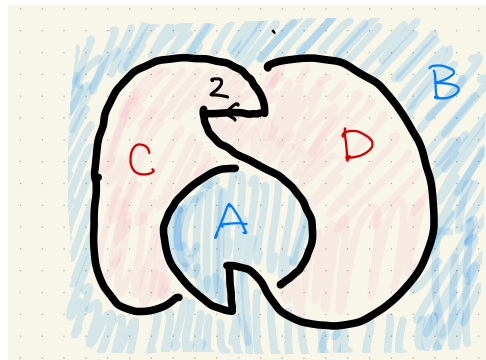


FIGURE 5. セル複体 K

辺1,2のまわりが複雑である。その部分は後で調べる。セル複体 K に関して次が成り立つ。

Claim 1. $S^3 \setminus K$ は、2つの3次元球体の内部と同相である。

Claim 1の証明の概略. 次の S^3 に埋め込まれたグラフを考える。このグラフに4つの2セルを下図(右)のように貼る。 S^3 内に埋め込まれた2セルを $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ と名付ける。得られた2次元セル複体を \tilde{K} と置く。すると、 $S^3 \setminus K$ と $S^3 \setminus \tilde{K}$ は同相である。(詳細はあとで述べる) \square

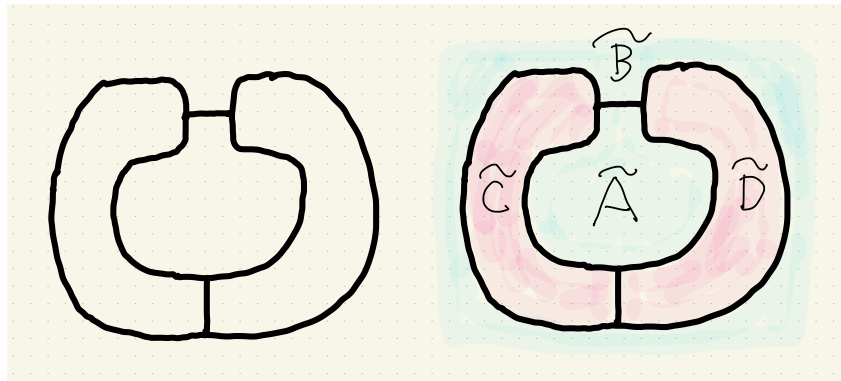


FIGURE 6. S^3 に埋め込まれたグラフと2次元セル複体 \tilde{K}

Claim 1 (の証明) より、 $S^3 \setminus K$ は「上半空間」と「下半空間」に分かれることがわかった。以下で、「上半空間」が Figure 2 の左側の四面体に対応して、「下半空間」が Figure 2 の右側の四面体に対応することを示す。

セル複体 K をより詳しく調べる。2セル A, B の和集合は理解しやすい(下図(左)参照)。また、2セル C, D の和集合も理解しやすい(下図(中央)参照)。しかし、辺2(と辺1)の周りの様子が、わかりにくい。

わかりやすくするために、辺2の周りを(Manascoのバブルっぽく)下図(右)のように置く。つまり、2つのバブル(3次元球体と同相なもの)以外では、グラフを S^2 上に配置する。

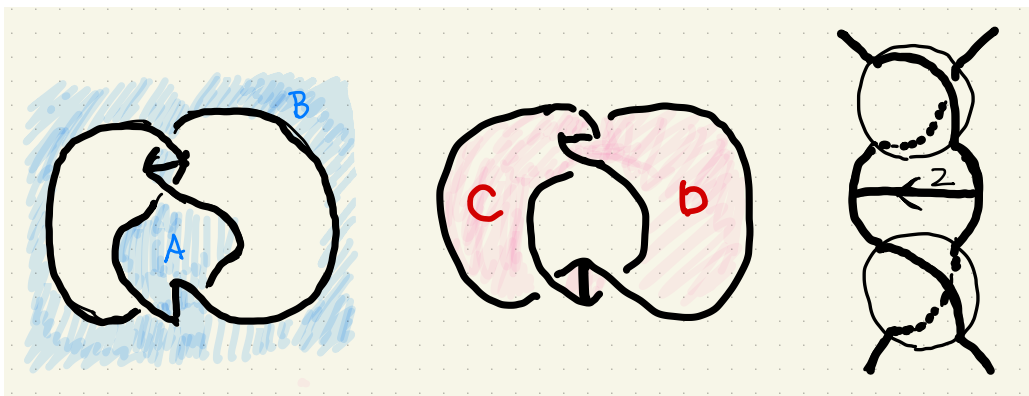


FIGURE 7. セル複体 K の様子

辺2の周りでは、2セル C, D, B, A は下図のようになる。 B' や A' は、 B と A の裏面のことである。

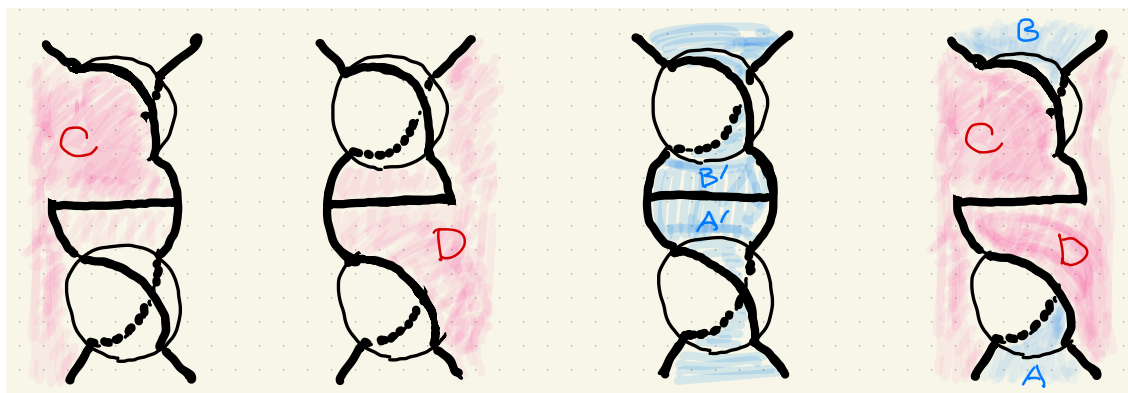


FIGURE 8. 辺2の周りの様子

別の見方をすると、辺2の周りは次のようになる。具体的には、辺2の周りにセルが6つ集まっている。(図の雰囲気は著書 [2] を参考にした) 辺2の周りなので、 B や A ではなく、 B' と A' が見えていることに注意。

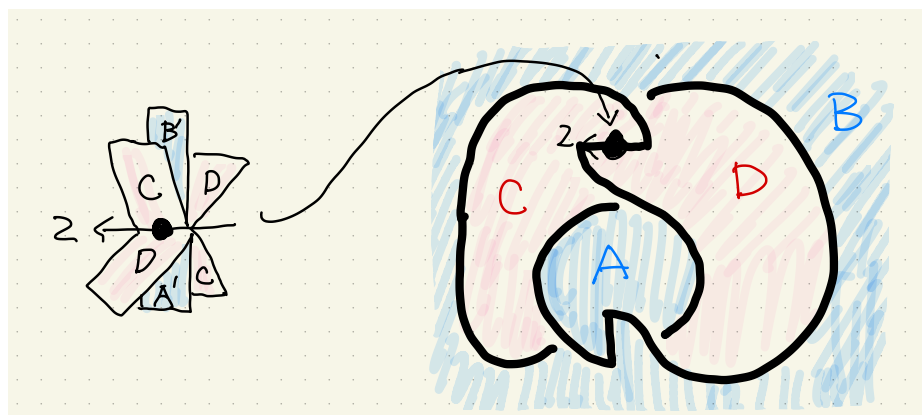


FIGURE 9. 辺2の周りの様子

「上半空間」において、2セル A, B, C, D がどのように隣り合っているのかを調べる。2セル A, C が隣り合っている部分は次のようになる（青線）。辺1は（「上半空間」では）隣り合っていないことに注意すること。

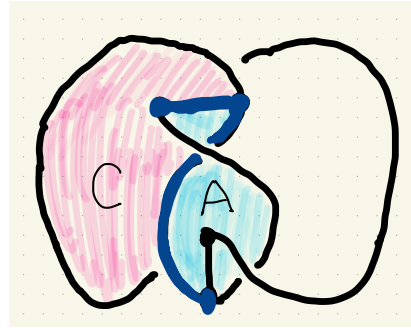


FIGURE 10. セル A とセル C

「上半空間」において、2セル A, B が隣り合っている部分は次のようになる（青線）。辺2は（「上半空間」でも「下半空間」でも）隣り合っていないことに注意すること。

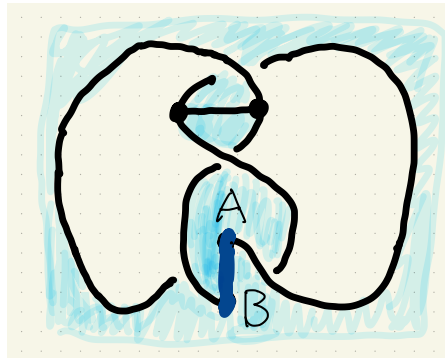


FIGURE 11. セル A とセル B

「上半空間」において、2セル A, D が隣り合っている部分は次のようになる（青線）。辺2は（「上半空間」では）隣り合っていないことに注意すること。

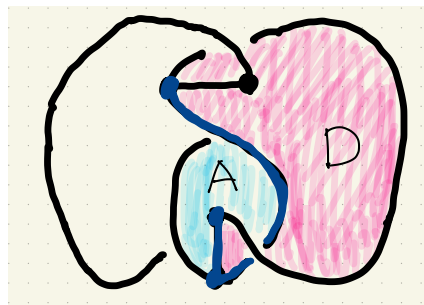


FIGURE 12. セル A とセル D

Claim 1 (の証明) より、「上半空間」は3次元球体の内部と同相である。これを(貼り付けられた)3セルの内部と見る。ここで、3セルとは、(抽象的な)3次元球体 B^3 をある写像

$$\partial B^3 \rightarrow K$$

で貼り付けたものである。この写像を指定するために、3次元球体(中身のつまった風船のイメージ)を次のように膨らませて、3次元球体の境界が2セル A, B, C, D となるようにする。(可能な限り膨らませた)3次元球体の境界において、どのように2セル A, B, C, D が見えているのかを考察する。

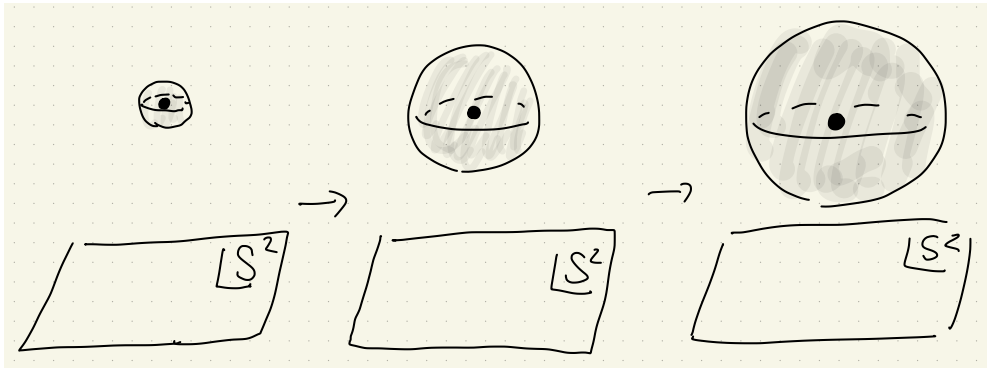


FIGURE 13. 3次元球体を膨らませる

この3次元球体の境界に関して、 A が下図のようになるように書くこととする。ただし、図は3次元球体の中から見ているとする。(例えば上図の黒丸から見る)

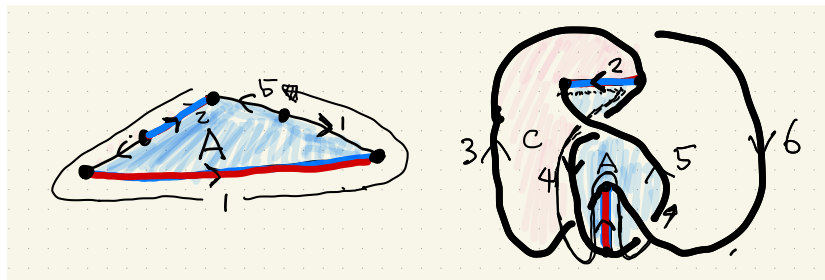


FIGURE 14. 3セルの貼り付け方

残りは次のようになる。次の図により3セルの貼り付け方が指定される。

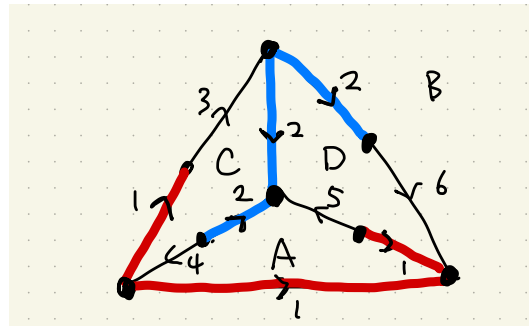
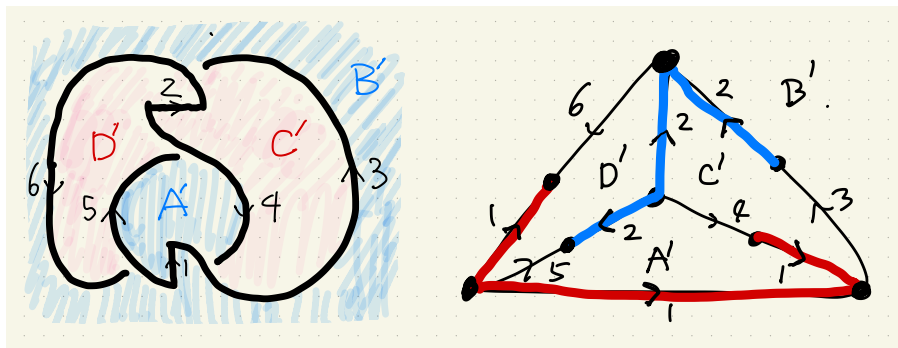


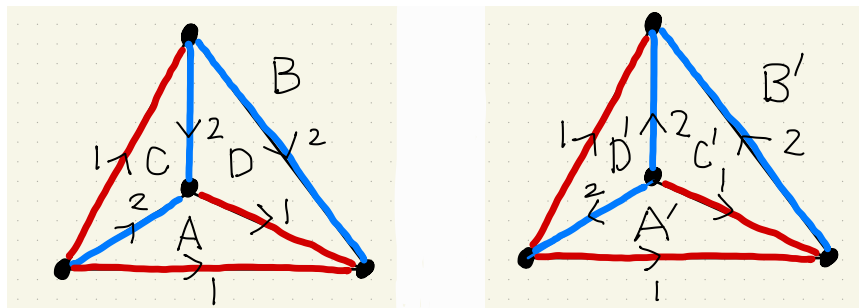
FIGURE 15. 3セルの貼り付け方

同様のことを「下半空間」に対して行くと、次が得られる。下図（左）は、セル複体 K を下から見た図である。

FIGURE 16. セル複体 K の裏側と3セルの貼り付け方

以上より、 K に2つの3セルを貼ると (S^3 と同相な) セル複体 K^3 が得られる。ここで 4_1 は、 K^3 の全ての頂点と辺3,4,5,6を合わせることにより得られる。

ここで、辺3,4,5,6を一つの頂点 v に潰す。得られたセル複体を M' と置く。構成より $M' \setminus \{v\}$ は $S^3 \setminus 4_1$ と同相である。 M' は次の四面体を貼り合わせたものである。

FIGURE 17. セル複体 M'

最後に M' と M が同相であることを確認する。そのために、上の四面体を次のように書き直す。 M' は次の四面体を「矢印の色」と「矢印の向き」が一致するように、面を貼り合わせたものである。

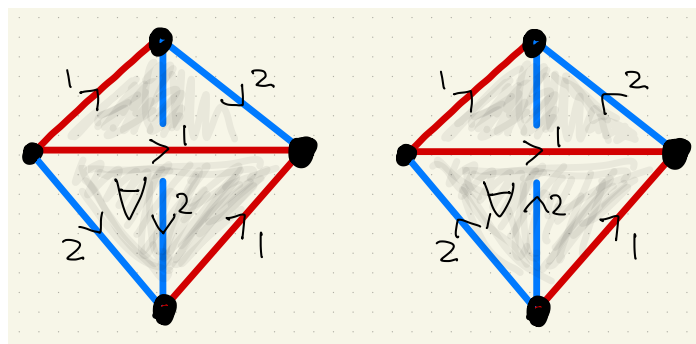


FIGURE 18. セル複体 M'

この貼り合わせは、Figure 2 と同じなので、 M' と M は同相である。

□

Claim 1 の証明を補完する。(論理的な間違いがあればご指摘ください) まず、次の二つの S^3 に埋め込まれたグラフ G, G' を考える。

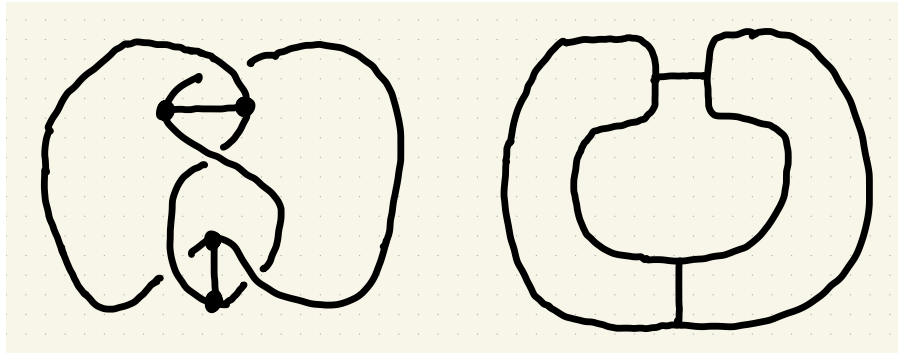


FIGURE 19. S^3 に埋め込まれたグラフ G, G'

グラフ G, G' の補空間は同相である。実際、 S^3 内における G の閉管状近傍 N は、連続変形により G' の閉管状近傍 N' になる。(下図参照)

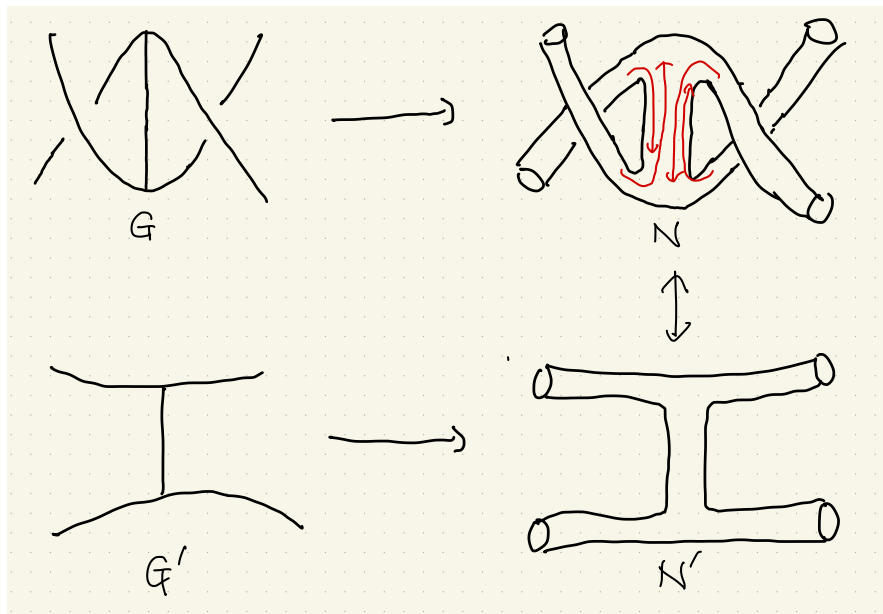


FIGURE 20. S^3 に埋め込まれたグラフ G, G'

これより、同相写像 $S^3 \setminus N \rightarrow S^3 \setminus N'$ が存在する。 $S^3 \setminus N$ と $S^3 \setminus G$ は同相であり、 $S^3 \setminus N'$ と $S^3 \setminus G'$ は同相である。以上より、同相写像

$$f: S^3 \setminus G \rightarrow S^3 \setminus G'$$

が得られた。この写像 f は A を A' に、 B を B' に、 C を C' に、 D を D' に写す。従って、 $S^3 \setminus K$ と $S^3 \setminus \tilde{K}$ は同相である。 $S^3 \setminus \tilde{K}$ は2つの3次元球体の内部と同相なので、 $S^3 \setminus K$ も2つの3次元球体の内部と同相である。

REFERENCES

- [1] 小島定吉・藤原耕二, サーストン万華鏡 一人と数学の未来を見つめて.
- [2] G. K. Francis, *A Topological Picturebook*, Springer-Verlag, 1987.
- [3] M. Lackenby, *Hyperbolic manifolds*, <http://peplemaths.ox.ac.uk/lackenby/>
- [4] W. Thurston, *Geometry and topology of three-manifolds*, Princeton Lecture Notes, 1977/78.
- [5] W. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, 1997.

立命館大学理工学部

Email address: `tabe@fc.ritsumei.ac.jp`