

# 微積分Ⅱ演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第1回 ('15年10月2日：Keywords・・・1変数関数の復習(マクローリン展開、広義積分))

まとめ.

**1-1. 関数の連続性**・・・関数  $y = f(x)$  が  $x = a$  で連続であるとは、任意の  $\epsilon > 0$  に対してある  $\delta$  を定めることができ、任意の  $|x - a| < \delta$  を満たす  $x$  に対して、 $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  を満たすことができる。これは、 $a$  収束する任意の点列  $(x_n)$  に対して、 $f(x_n) \rightarrow a$  となることと同値である。

**1-2. 広義積分の収束**・・・広義積分の収束は以下のべき関数の収束を用いて行う。

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$  は  $s > 1$  のとき収束し、 $s \leq 1$  のとき発散する。

$\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$  は  $s < 1$  のとき収束し、 $s \geq 1$  のとき発散する。

**1-3. 内点**・・・集合  $S$  の内点  $p$  とは、ある  $\epsilon > 0$  があって、 $\epsilon$ -近傍  $U_\epsilon(p)$  が  $p \in U_\epsilon(p) \subset S$  となること。  $S$  の内点全体を  $\overset{\circ}{S}$  とかく。  $S = \overset{\circ}{S}$  となる集合  $S$  を開集合という。

**1-4. 外点**・・・集合  $S$  の外点  $p$  とは、ある  $\epsilon > 0$  があって、 $\epsilon$ -近傍  $U_\epsilon(p)$  が  $p \in U_\epsilon(p) \cap S = \emptyset$  となること。  $(S^c)$  と表せる。ここで  $S^c$  は  $S$  の補集合のこと。

**1-5. 境界点**・・・集合  $S$  の境界点  $p$  とは、任意の  $\epsilon > 0$  に対して、 $\epsilon$ -近傍  $U_\epsilon(p)$  が  $U_\epsilon(p) \cap S \neq \emptyset$  かつ、 $U_\epsilon(p) \cap S^c \neq \emptyset$  となること。  $\partial S$  とかく。  $\partial S \subset S$  のとき、 $S$  は閉集合という。

---

### 今日の課題.

1. 春学期の復習(関数の連続性、テイラー展開、広義積分、広義積分の収束)

例：三角関数  $\sin x, \cos x$ 、指数関数  $\exp(x)$ 、べき関数  $x^\alpha$

2. 内点、外点、開集合、閉集合。このような点や集合をどのように言い表したらよいか？

---

#### 問題-1-1. [一変数関数の連続性]

つぎの関数が連続かどうか調べよ。

(1)  $2x$

(2)  $x^2$

#### 問題-1-2. [微分法]

次の関数を微分しなさい

(1)  $f(x) = \arcsin(x)$

(2)  $f(x) = \arctan(x)$

#### 問題-1-3. [マクローリン展開]

次の関数を3次の項までマクローリン展開しなさい。

(1)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(2)  $f(x) = \log(1-x)$

(3)  $f(x) = \sin(x)$

(4)  $f(x) = \tanh^{-1}(x)$

#### 問題-1-4. [広義積分]

次の関数の定積分(広義積分)および、不定積分をしなさい。

$$(1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$(3) \int \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$$

$$(4) \int_0^1 \tan(x) dx$$

### 問題-1-5. [広義積分の収束]

次の広義積分は収束するか？

$$(1) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$(2) \int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{x} dx$$

$$(3) \int_0^1 \log(x) dx$$

$$(4) \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

### 問題-1-6. [面積]

次の曲線で囲まれる部分の面積を求めよ

$$r = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

### 問題-1-7. [内点、外点]

平面上の円盤  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$  の内点、外点、境界点を求め、図示しなさい。

---

### 宿題-1-1. [マクローリン展開]

次の関数をマクローリン展開しなさい。答えだけでなくその方法も記せ。

$$(1) f(x) = \arctan(x)$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

### 宿題-1-2. [定積分]

次の曲線で囲まれる面積を求めなさい。

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

---

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis15.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog：<http://mochans.blogspot.jp/>

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります。アドレスはプリント1ページ目上部。