微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第10回（'15年12月18日：Keywords $\cdots n$ 次元球の体積・ガンマ関数・ベータ関数）

まとめ.

10-1. 臨界点 ••• 関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に対して、任意の i に対して、$f_{x_i} = 0$ を満たす点のことを臨界点という．臨界点の値を臨界値という．

10-2. コンパクト ••• ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 A をコンパクト集合という．有界とは、A の任意の座標 x_i に対して、ある実数が存在して、$(x_1, \cdots, x_n) \in A$ に対して、$|x_i| < M_i$ となることをいう．

10-3. コンパクト集合上の連続関数 ••• （定理）コンパクト集合上の連続関数には、最大最小が存在する．
とくに、コンパクト集合上の C^1 級関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の臨界点が 2 個のとき、それらは、極大、極小であり特に、最大、最小である．

10-4. ガンマ関数 •••

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

として定義する．次の性質が満たされる．

(1) $\Gamma(x) > 0, \Gamma(1) = 1$

(2) $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$．特に n が整数とするとき、$\Gamma(n + 1) = n!$

(3) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

10-5. ベータ関数 •••

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0)$$

として定義される．次の性質が満たされる．

(1) $B(p, q) = B(q, p)$

(2) $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$

10-6. 極座標 ••• n 次元の極座標は、回転体の座標を繰り返しとることことで、以下のように得られる．

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

10-7. S^n(n 次元球面) •••

$$\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2\}$$

なる集合を n 次元球面といい、S^n とかく.

10-8. **B^n(n 次元球体)** •••

$$\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n | x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le r^2\}$$

なる集合を n 次元球体といい、B^n とかく.

今日の課題.

1. ガンマ関数、ベータ関数. 2.n 次元球の体積、表面積.

小テスト-10. [重積分]

次の重積分

$$\int\int_{x^2+y^2<1}(a^2x^2+b^2y^2)dxdy=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$$

を示せ.

問題-10-1. [ガンマ関数]

$V_n(r)$ を半径が r の n 次元球の体積とし、$V_n(r)=C_nr^n$ とする.

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^n}dx_1dx_2\cdots dx_n=C_n\Gamma(\frac{n}{2}+1)$$

となることを示せ.

問題-10-2. [2 次元球の体積]

(1) 2 次元球の体積を求めよ.

(2) 3 次元球の体積を求めよ.

(3) 4 次元球の体積を求めよ.

問題-10-3. [ガンマ関数]

次の関数をベータ関数やガンマ関数を用いて表せ.

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\sqrt{2-x}}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}x^7dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1(1-x^2)^5dx$

(6) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}x^3dx$

宿題-10-1. [ベータ関数]

(1) 変数変換により $B(p,q)=B(q,p)$ が成り立つことを示せ.

(2)

$$\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\cos^b\theta d\theta=\frac{1}{2}B(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2})$$

を示せ.

(3) この公式を用いて、$\int_0^{\pi/2} \sin^5\theta\cos^8\theta d\theta$ を求めよ.

(4) この公式を用いて、$\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta$ の値をガンマ関数によって求めよ.

宿題-10-2. [積分値]

$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$ の積分を求める.

(1) $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ を極座標を使って求めよ.

(2) 上記の積分が $\sqrt{\pi}/2$ であることを示せ.

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html
blog：http://motochans.blogspot.jp/
Twitter: BasicMathIIB