微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第11回（*'15 Christmas Day*：Keywords ⋯ 線積分、グリーンの定理）

まとめ.

11-1. 線積分 ••• $C=(x(t),y(t))$ を平面上の曲線とする．線積分は

$$\int_C (f(x,y)dx+g(x,y)dy)=\int\left(f(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+g(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right)dt$$

として計算される．この計算は C の任意のパラメータ表示方法によらない．実際別のパラメータ $t=t(s)$ とし、$x(t(s))=\xi(s), y(t(s))=\eta(s)$ とする．

$$\int\left(f(\xi(s),\eta(s))\frac{d\xi}{ds}+g(\xi(s),\eta(s))\frac{d\eta}{ds}\right)ds=\int\left(f(x,y)\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}+(g(x,y)\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}\right)ds$$

$$=\int\left(f(x,y)\frac{dx}{dt}+g(x,y)\frac{dy}{dt}\right)dt$$

11-2. グリーンの定理 ••• C を平面上の単純閉曲線とする．C を境界とする平面上の領域を D とする．$P(x,y),Q(x,y)$ が D 上で C^1 級関数とする．このとき以下の等式が成り立つ．

$$\int_C (P(x,y)dx+Q(x,y)dy)=\int_D\left(\frac{\partial Q}{dx}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

今日の課題.

1. 線積分、グリーンの定理を応用すること．

小テスト-11. [ガンマ関数]

$x^3=t$ と変数変換することで、$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ の値を Γ 関数、および、$\sqrt{\pi}$ などを用いてかけ．ただし、$B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$、$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ などは用いてよい．

問題-11-1. [四面体の体積]

宿題-11-1 の式を用いることで、四面体 $x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1$ で定義される四面体の体積を求めよ．

問題-11-2. [n 次元体積]

n 次元空間 $\mathbb{R}^n$ 上、

$$|x_1|^\alpha+|x_2|^\alpha+\cdots+|x_n|^\alpha=r^\alpha$$

によって囲まれる図形（体積を $V_{\alpha,n}(r)$ とする）について以下の問題に答えよ．

(1) $x_1,x_2,\cdots,x_n\geq 0$ に制限すると、図形は何分割されるか？

(2) $\left(\dfrac{x_1}{r}\right)^\alpha=X_i$ と変数変換することで、ヤコビアン $\dfrac{\partial(X_1,\cdots,X_{n-1})}{\partial(x_1,\cdots,x_{n-1})}$ を計算せよ．

(3) 宿題-11-1 の等式（の一般化）を用いることで、$V_{\alpha,n}(r)$ を求めよ．

(4) $V_{2,n}(r)$ は n 次元球の体積であるが、Γ-関数を用いて表せ．

問題-11-3. [線積分]

次の積分の値を求めよ．

(1) $\int_C (x^2dx + 2xydy)$、C は $(1,1)$ から $(-1,3)$ へ直線を結んだもの．

(2) $\int_C (xdx + ydy)$、C は単位円を反時計回りに回る．

(3) $\int_C (-ydx + xdy)$、C は単位円を反時計回りに回る．

(4) $\int_C (y^2dx + x^2dy)$、C は単位円のうち y が正の部分．

問題-11-4. [グリーンの定理]
グリーンの定理を用いると、平面上の図形 D の面積 $S(D)$ は、

$$S(D) = \int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(xdy - ydx)$$

と計算できる．この公式を用いて以下の曲線で囲まれる図形の面積を求めよ．

(1) 半径 r の円

(2) カーディオイド $r = a(1 + \cos\theta)$

宿題-11-1. [四面体領域上の積分]
$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ かつ $x + y + z \leq 1$ なる四面体領域を D とする．このとき以下の問題に答えよ．

(1) D を、$x + y + z = u, y + z = uv, z = uvw$ なる関係式から、x, y, z を u, v, w の式で表せ、変換をすることで、D の内部は $0 < u < 1$ かつ $0 < v < 1$ かつ $0 < w < 1$ なる領域と一対一であることを示せ．
(ヒント：逆対応 $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ を作り、D の範囲の条件から、$0 < u < 1$ かつ $0 < v < 1$ かつ $0 < w < 1$ を導け．)

(2) ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ を計算せよ．

(3) ベータ関数の定義式を用いることで、等式

$$\int\int\int_D x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1 - x - y - z)^{s-1}dxdydz = B(p + q + r, s)B(q + r, p)B(r, q)$$

を示せ．

(4) 上の等式の右辺を変形することで以下の等式を示せ．

$$B(p + q + r, s)B(q + r, p)B(r, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(p + q + r + s)}$$

宿題-11-2. [体積]
半径が 1 の球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ のうち、円柱 $x^2 + y^2 \leq x$ によって切り取られる部分の図形の体積を求めよ．
(教育的配慮：$(W^2)^{\frac{1}{2}} = |W|$ であることに注意．答えは $\dfrac{4\pi}{3}$ ではありません．)

宿題-11-3. [グリーンの定理]
問題 11-4 の公式を用いて、アステロイド $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ によって囲まれる図形の面積を求めよ．積分計算において、宿題-10-1(4) の答えを用いてもよい．
