微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第12回（'16年1月8日：Keywords ⋯ 広義重積分、級数の収束）

まとめ.

12-1. 級数の収束 ⋯ $s_n=\sum_{n=1}^{n}a_k$ とおくとき、s_n が極限 $n\to\infty$ において収束するとき、級数は収束するといい、その値を $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ とかく.

12-2. 等比級数 ⋯ $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ は $|r|<1$ のとき収束し、値は $\frac{a}{1-r}$ となる.

12-3. 級数の判定 ⋯ **（ライプニッツの判定法）** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が交代級数（つまり、任意の n に対して $a_na_{n+1}<0$ が成り立つ）であり、$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるとき、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.

（コーシーの判定法） $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は正項級数であり、（有限この n を除いて）$\sqrt[n]{a_n}\le r<1$ を満たす r が存在するとき、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.

（ダランベールの判定法） $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は正項級数であり、（有限この n を除いて）$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le r<1$ であるとき、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.

（絶対収束）任意の n に対して $|a_n|\le b_n$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する.

12-4. 一様収束 ⋯ 関数列 $f_n(x)$ が $B\subset\mathbb{R}$ で一様収束するとは、任意の $\epsilon>0$ に対して、ある N が存在して $n>N$ なる任意の n に対して、任意の $x\in B$ に対して $|f(x)-f_n(x)|<\epsilon$ が成り立つ.

12-5. 関数列の極限 ⋯ f_n が区間 I で連続な関数であり、f_n が I において f に一様収束するとする. このとき、f は I で連続である.

12-6. 微分と極限の順序交換 ⋯ $f_n(x)$ が区間 I 上で C^1 級関数とし、$f_n'(x)$ が I 上一様収束するとし、ある点 $x_0\in I$ で、$f_n(x_0)$ である点に収束しているとする. このとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{df_n(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ が成り立つ. つまり、微分と極限が交換ができる.

12-7. 積分と極限の順序交換 ⋯ $f_n(x)$ が区間 I 上で連続関数とし、$f_n(x)$ が I 上一様収束しているとする. このとき、$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt=\int_a^x\lim_{n\to\infty}f_n(t)dt$ が成り立つ. つまり、極限と積分の交換ができる.

12-8. 広義（コンパクト）一様収束 ⋯ 関数列 $f_n(z)$ が閉領域とは限らない領域 A において、広義（コンパクト）一様収束するとは任意の有界閉集合 $B\subset A$ において、$f_n(z)$ が一様収束するということである.

12-9. 項別微積分 ⋯ $f_n(z)$ をある領域 A 上での連続関数からなる関数項級数とする.

(1). A において $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら $f(z)$ も A 上連続である.

(2). A において $f_n(z)$ が C^1 級関数列であり、$\sum_{n=1}^{\infty}f_n'(z)$ が、I 上広義一様収束し、さらに、ある $z_0\in I$

があって、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は A で広義一様収束し、項別微分

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(z)}{dz}$$

が成り立つ.

(3). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら、$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^z f_n(t)dt$ は A 上広義一様収束し、A 上で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt$$

が成り立つ.

12-10. 優級数法 ••• 区間 I で定義された関数項級数 $f_n(x)$ に対して $|f_n(x)| \le M_n$ が成り立ち、$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が成り立つとする．このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は一様収束する.

12-11. べき級数 ••• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形の級数をべき級数という．このべき級数に対して

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

として計算される量をこのべき級数の収束半径とよぶ．この R は $|z| < R$ なる任意の複素数 z に対して級数が（絶対）収束する．特にこのとき、関数項級数は一様収束する．収束半径内においては項別微積分ができ、できた級数も同じ収束半径をもつ.

今日の課題.

1. 広義積分．2. 級数の収束について

小テスト-12. [面積]

$(x, y) = (\cos\theta, \sin^3\theta) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ.

ただし、グリーンの公式や、$\int_0^{2\pi} \sin^{2n}\theta d\theta = 2B\left(\frac{2n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を用いてもよい.

問題-12-1. [広義積分]

次の広義重積分を計算せよ．ただし、$D = [0, 1] \times [0.1]$ とする.

$$\int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

問題-12-2. [パラメータのある関数の積分の微分]

パラメータを含む積分の微分において、a, b が y の関数 $a(y), b(y)$ であるとする．このとき、下を示せ.

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx = f(b, y)\frac{db}{dy} - f(a, y)\frac{da}{dy} + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial a}dx$$

問題-12-3. [積分]

$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}$ であることを使って、

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

を示せ.

問題-12-4. [積分]
次の関数を α によって微分せよ.

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}dx$$

問題-12-5. [級数]
次の級数が収束するか、コーシーの判定法、ダランベールの判定法のいずれかを用いて求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{n-1}{n})^{n^2}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} e^n$

宿題-12-1. [広義積分]
次の積分を求めよ.

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

ただし、$D = \{(x,y)|x^2+y^2 < 2ax\}$

宿題-12-2. [級数]
次の級数は収束するか?ダランベールの判定法、もしくはコーシーの判定法を用いてもよい.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{2^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n}{n^2+1}$

HP : `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html`
blog : `http://motochans.blogspot.jp/`
Twitter: BasicMathIIB

提出-12-1. [広義積分]

番号　　　　　　　　　　　　　　　　名前

次の広義積分を求めよ．

$$\int\int_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}dxdy \quad D = \{(x,y)|x \geq 1, y \geq 1\}$$