

微積分Ⅱ演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第13回 ('16年1月22日 : Keywords ... 曲面積、回転体)

まとめ.

13-1. 曲面積 ... C^1 級曲面 $\{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$ の部分の面積は、

$$\int \int_D \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} dx dy$$

として計算できる .

13-2. 回転体の体積 ... C^1 級曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積は

$$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

として計算できる .

13-3. 回転体の表面積 ... C^1 級曲線 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) を x 軸の周りに回転してできる回転体の表面積は

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

として計算できる .

今日の課題.

1. 曲面積の積分ができること . 2. 回転体の表面積、体積の計算ができること

小テスト-13. [広義積分]

広義積分

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

を求めよ .

問題-13-1. [体積]

次の図形の体積を求めよ .

- (1) $x^2 + y^2 \leq a^2$ における、2変数関数 $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ のグラフの表面積 .
- (2) $x^2 + y^2 \leq a^2$ における、2変数関数 $z = xy$ のグラフの表面積 .
- (3) 円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ と円柱 $y^2 + z^2 \leq a^2$ の共通部分 .
- (4) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$
- (5) 曲面 $z = x^2 + y^2$ と平面 $z = 2x$ に囲まれた部分 .
- (6) $0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq y + z \leq 1, 0 \leq z + x \leq 1$
- (7) 円盤 $x^2 + (y - b)^2 \leq a^2$ を x 軸に沿って回転してできる図形 .

問題-13-2. [回転体の体積と表面積]

以下によって定義される回転体の体積と表面積を求めよ .

- (1) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) を x 軸の周りに回転した図形 .
- (2) $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 1$) を x 軸の周りに回転した図形 .

(3) カテナリ $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ を x 軸の周りに回転した図形 .

(4) $y = e^{-x} \ (x > 0)$ を x 軸の周りに回転した図形 .

問題-13-3. [表面積]

下のように定義された部分の表面積を求めよ .

(1) 円柱 $y^2 + z^2 = a^2$ の円柱 $x^2 + y^2 + a^2$ によって切り取られる部分 .

(2) 円柱 $y^2 + z^2 = a^2$ の球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ によって切り取られる部分 .

(3) 円 $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ を x 軸に沿って回転してできる図形 .

宿題-13-1. [曲面積]

円柱 $x^2 + y^2 \leq x$ のうち、球面 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ によって切り取られる部分の表面積を求めよ .

宿題-13-2. [級数]

以下の級数について答えよ .

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを証明せよ .

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することを証明せよ .

HP : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html>

blog : <http://motochans.blogspot.jp/>

Twitter: BasicMathIIB

提出-13-1. [曲面積]

番号

名前

半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$) のうち、 $x^2 + y^2 \leq x$ によって切り取られる部分の面積を求めよ.