微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第14回（'16年1月29日：Keywords ⋯ 級数、級数展開、収束半径）

まとめ.

14-1. 一様収束 ••• 関数列 $f_n(x)$ が $B \subset \mathbb{R}$ で一様収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N が存在して $n > N$ なる任意の n に対して、任意の $x \in B$ に対して $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ が成り立つ.

14-2. 関数列の極限 ••• f_n が区間 I で連続な関数であり、f_n が I において f に一様収束するとする. このとき、f は I で連続である.

14-3. 優級数法 ••• 区間 I で定義された関数項級数 $f_n(x)$ に対して $|f_n(x)| \leq M_n$ が成り立ち、$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ が成り立つとする. このとき、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は一様収束する.

14-4. 広義（コンパクト）一様収束 ••• 関数列 $f_n(z)$ が閉領域とは限らない領域 A において、広義（コンパクト）一様収束するとは任意の有界閉集合 $B \subset A$ において、$f_n(z)$ が一様収束するということである.

14-5. 項別微積分 ••• $f_n(z)$ をある領域 A 上での連続関数からなる関数項級数とする.

(1). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら $f(z)$ も A 上連続である.

(2). A において $f_n(z)$ が C^1 級関数列であり、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ が、I 上広義一様収束し、さらに、ある $z_0 \in I$ があって、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は A で広義一様収束し、項別微分

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(z)}{dz}$$

が成り立つ.

(3). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら、$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^z f_n(t)dt$ は A 上広義一様収束し、A 上で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt$$

が成り立つ.

14-6. べき級数 ••• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ の形の級数をべき級数という. このべき級数に対して

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

として計算される量をこのべき級数の収束半径とよぶ. この R は $|z| < R$ なる任意の複素数 z に対して級数が（絶対）収束する. 特にこのとき、関数項級数は一様収束する. 収束半径内においては項別微積分ができ、できた級数も同じ収束半径をもつ.

また、収束半径を求めるのに、$|z| < R$ で絶対収束し、$|z| = R$ において発散するものを探してもよい.

今日の課題.

1. 級数の収束が判定できること. 2. 級数展開をすること. 3. 一様収束すること.

小テスト-14. [曲面積]
次の曲面の曲面積を求めよ.

$$S = \left\{\left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) \middle| x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

を求めよ.

問題-14-1. [級数の収束]
次の級数が収束するかどうか判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \ (a > 0)$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

問題-14-2. [一様収束]
つぎの関数列は $[0, 1]$ で一様収束するか？

(1) nxe^{-nx}

(2) $n^2 x^n (1 - x)^n$

(3) $nx(1 - x)^n$

問題-14-3. [関数項級数]
次の級数の区間 $[0, 1]$ における一様収束性を判定せよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin(2\pi x)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - x)}{n} x^n$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - x^2) x^n$

問題-14-4. [収束半径]
次のべき級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}) x^n$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n - 1)!!}{n^n} x^n$

問題-14-5. [べき級数]
$f(n)$ を多項式とする．このとき、以下の問題に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n$ の収束半径は 1 であることを示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)z^n$ を求めよ．

(3) $f(n)$ が m 次多項式であるとする．このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)z^n = \frac{g(z)}{(z-1)^{m+1}}$ となることを示せ．ここで、$g(z)$ は $z-1$ で割れないある多項式．

宿題-14-1. [数列の収束]
次の級数は収束するか？

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)-1}{(\log(n+1))^2}$$

宿題-14-2. [一様収束、収束半径]
次の問題に答えよ．

(1) 下の式の左辺が領域内で広義一様収束することを示し、等式を証明せよ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} \quad (|x|<1)$$

(2) 次のべき級数の収束半径を求めよ．

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n\log n}$$

HP：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html`
blog：`http://motochans.blogspot.jp/`
Twitter: BasicMathIIB

提出-14-1. [級数の収束]

番号　　　　　　　　　　　　　　名前

次の級数が収束するか答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+3n+1}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$

提出-14-2. [べき級数展開]

つぎの関数の $z = a > 1$ でのべき級数展開を求めよ．またその収束半径を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-z}$

(2) $\mathrm{Arctan}(x)$