微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第15回（'16年2月5日：Keywords ··· 広義一様収束、秋学期の復習）

まとめ.

15-1. 一様収束 ••• 関数列 $f_n(x)$ が $B \subset \mathbb{R}$ で一様収束するとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある N が存在して $n > N$ なる任意の n に対して、任意の $x \in B$ に対して $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ が成り立つ.

15-2. 関数列の極限 ••• f_n が区間 I で連続な関数であり、f_n が I において f に一様収束するとする. このとき、f は I で連続である.

15-3. 広義（コンパクト）一様収束 ••• 関数列 $f_n(z)$ が閉領域とは限らない領域 A において、広義（コンパクト）一様収束するとは任意の有界閉集合 $B \subset A$ において、$f_n(z)$ が一様収束するということである.

15-4. 項別微積分 ••• $f_n(z)$ をある領域 A 上での連続関数からなる関数項級数とする.

(1). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら $f(z)$ も A 上連続である.

(2). A において $f_n(z)$ が C^1 級関数列であり、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z)$ が、I 上広義一様収束し、さらに、ある $z_0 \in I$ があって、$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ が収束するなら $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ は A で広義一様収束し、項別微分

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n(z)}{dz}$$

が成り立つ.

(3). A において $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ が $f(z)$ に広義一様収束するなら、$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^z f_n(t)dt$ は A 上広義一様収束し、A 上で

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)dt$$

が成り立つ.

今日の課題.

1.（広義）一様収束の概念の理解とその示し方　2. 秋学期の復習.

問題-15-1. [一様収束]

つぎの関数列は $[0,1]$ で一様収束するか？

(1) nxe^{-nx}　　(2) $n^2x^n(1-x)^n$

(3) $nx(1-x)^n$

問題-15-2. [関数項級数]

次の級数が $(-1,1)$ において広義一様収束することを示せ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html
blog：http://motochans.blogspot.jp/

Twitter: BasicMathIIB

提出-15-1. [ある級数の和]

番号　　　　　　　　　　　　　名前

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を次のようにして示せ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ を求めよ.

(2) $\mathrm{Arcsin}(x)$ のべき級数展開 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ が $(-1,1)$ 上で広義一様収束することを示せ.

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ をガンマ関数を用いて表せ、またその値を求めよ.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を示せ.