微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 2 回（'15 年 10 月 9 日：Keywords $\cdots$ 面積、連続性、内点、外点、境界点）

まとめ.

2-1. 多変数関数の連続性 $\cdots$ 多変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での連続性

$$f(a,b)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

は、任意の $\epsilon>0$ に対して、$d((x,y),(a,b))=\sqrt{(x-a)^2+(x-b)^2}<\delta$ ならば、$|f(x,y)-f(a,b)|<\epsilon$ となる δ が存在することである.

しかし、ユークリッド空間上では、これは (a,b) に近づく任意の点列 $\boldsymbol{p}_n = (a_n,b_n)$ に対して、$f(a_n,b_n)$ が $f(a,b)$ に収束すること（点列連続）と同値である．ただし、(a_n,b_n) が (a,b) に近づくとは、$d((a_n,b_n),(a,b))\to 0$ となることである.

2-2. ランダウの記号 $\cdots$ ある関数 $f(x),h(x)$ に対して、$\lim_{x\to a} f(x)/h(x)=0$ となるとき、

$$f(x)=o(h(x))\ \ (x\to a)$$

とかく．多変数関数の場合においても同じ定義をする．ある関数 $f(x,y),h(x,y)$ が $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)/h(x,y)=0$ となるとき、

$$f(x,y)=o(h(x,y))\ \ (x,y)\to(a,b)$$

とかく.

つまり、極限において関数 f は h と比べてかなり小さいことを意味しています．かなり小さいとは、その極限においてその比が 0 に収束すること（定義そのもの）を意味しています.

（参考：`http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html`（ランダウの記号））

今日の課題.

0. 面積
1. 内点、外点、境界点、集積点、開集合、閉集合
2. 多変数の連続性、微分可能性.

小テスト-2-1. [テイラー展開の一般項]

$\arcsin(x)$ の原点でのテイラー展開（マクローリン展開）の n 次の係数を求めなさい.

問題-2-1. [一変数関数の連続性]

定直線に沿って円が滑らずに回転するときの円周上の定点の軌跡をサイクロイドという．x 軸に沿って回転したものを考える．そのとき、サイクロイドはパラメータ θ を使って

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

となる．このとき、サイクロイド $(0\le\theta\le 2\pi)$ と x 軸とで囲まれる面積を求めよ.

問題-2-2. [内点、外点、境界点]

次の集合において、内点、外点、境界点を示せ.

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\le 1, y\le 0\}$$

また、境界点はいつでも集積点になっていることを示せ.

問題-2-3. [関数の極限]
次の関数の極限を調べよ.

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}$　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(\cos(xy))}{x^2+y^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

問題-2-4. [連続関数]
次の関数は連続か．判定せよ.

(1) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{x^4+x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$　(6) $\begin{cases} \dfrac{x+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

問題-2-5. [ランダウの記号]

(1) 次の等式を示せ.

$$e^x\cos x = 1 + x + o(x^2)$$

(2) 次の等式を示せ.

$$\log(1+x) = \sin x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

(3) $f(x)=o(x^n)\ \ (x\to 0)$ かつ、$g(y)=o(y^n)\ \ (y\to 0)$ を満たすとき、

$$f(x)f(y) = o((\sqrt{x^2+y^2})^{n+m})\ \ (x,y)\to(0,0)$$

を示せ.

宿題-2-1. [関数の極限]
次の関数の極限を求めよ。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin(xy)+(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

宿題-2-2. [関数の連続性]

(1) $(x,y) \neq (0,0)$ で定義される関数 $f(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は近づき方によってどのような値に近づくか？

(2) (1) の関数は全平面上の関数として連続か？

(3) 次の関数の原点での連続性を調べよ．

$$f(x,y) = \begin{cases} y \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html
（主にプリントのダウンロード用）
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
（授業内容など）

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント 1 ページ目上部．