

微積分Ⅱ演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第3回 ('15年10月16日：Keywords・・・偏微分の計算、全微分)

まとめ.

3-1. 偏微分可能・・・ $f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ において、 x で偏微分可能であるとは、 $f(x, b)$ が一変数関数として微分可能であることをいう。 y に関する微分可能性も同じようにする。

3-2. 偏微分係数、偏導関数・・・ $f(x, y)$ の $(x, y) = (a, b)$ での x に関する偏微分の微分係数を $f_x(a, b)$ もしくは、 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ とかく。これは、関数のグラフ $z = f(x, y)$ を $y = b$ に制限してできる関数 $z = f(x, b)$ の微分係数である。また、関数を $f_x(x, y)$ を偏導関数という。また $(f_x)_x(x, y)$ のような高次の偏導関数を $f_{xx}(x, y)$ もしくは $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ や $(f_x)_y(x, y) = f_{xy}(x, y)$ もしくは $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ とかく。

3-3. 全微分・・・2変数関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で全微分可能であるとは、ランダウの記号を用いて、

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \alpha h + \beta k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

が成り立つような α, β が存在することである。一変数のときの微分可能性は、

$$f(a + h) = f(a) + \alpha h + o(h) \quad (h \rightarrow 0)$$

となるような h が存在することである。全微分可能であれば、偏微分可能であり $\alpha = f_x$ かつ $\beta = f_y$ である。これは、 $(a, b, f(a, b))$ においてグラフ上に接平面が存在することと同値である。

全微分可能とは、偏微分可能と区別するための用語であり、単に微分可能という場合には、全微分可能のことを指す。

3-4. 全微分可能であるための必要条件・・・ $f(x, y)$ は全微分可能であるなら、関数 $z = f(x, y)$ の偏微分 f_x, f_y が存在する。つまり偏微分可能である。

3-5. 全微分可能であるための十分条件・・・関数 $z = f(x, y)$ の偏微分 f_x, f_y が存在し、それらが連続であれば、 $f(x, y)$ は全微分可能である。

今日の課題.

1. 偏微分の計算.
 2. 全微分可能性
-

小テスト-3. [関数の連続性]

次の関数は $(0, 0)$ で極限をもつか示せ。

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$$

(もつ場合、極座標表示をして収束を示せ。もたない場合、近づく方向を変えて極限を見てみよう。)

問題-3-1. [偏微分]

つぎの関数の偏微分 f_x, f_y を計算せよ。また、高次の偏微分 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} も計算せよ。

$$(1) f(x) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$(2) f(x) = \frac{y}{x}$$

$$(3) f(x, y) = x^2 + y^2 + xy^2$$

$$(4) f(x) = xe^{xy}$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{1-xy}$$

$$(6) f(x) = \log(x^2 + y^2)$$

問題-3-2. [偏導関数]

(1)

$$u = \frac{x \cos \alpha - y \sin \alpha}{x^2 + y^2}, v = \frac{x \sin \alpha + y \cos \alpha}{x^2 + y^2}$$

とする．このとき、 $u_x + v_y$ を計算せよ．

(2)

$$u = x^3 - 3xy^2, v = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

とする．このとき、 $u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$ であることを示せ．

問題-3-3. [全微分可能性]

関数 $x^2 + y^2$ が (a, b) で全微分可能であることを定義に基づいて示せ．

問題-3-4. [全微分可能性]

次の関数は原点で全微分可能か判定せよ．

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \log(\sin(xy)) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(4) f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

宿題-3-1. [偏微分]

$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 2xy + 1}}$ とするとき、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 - x^2) \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y^2 \frac{\partial f}{\partial y} \right\} = 0$$

を満たすことを示せ．

宿題-3-2. [全微分可能性]

以下の問題に答えよ．

(1) 関数 $f(x, y) = xy$ が全微分可能であることを定義に基づいて示せ．

(2) 次の関数は原点 $(0, 0)$ で全微分可能であるか．偏導関数の連続性などを使って示せ．

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$