微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 4 回（'15 年 10 月 23 日：Keywords $\cdots$ 合成関数の微分法）

まとめ.

4-1. 接平面の方程式 ••• 関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能とする．このとき、

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) \ \ (x, y) \to (a, b)$$

を満たすが、最後の項を取り除いて (**一次近似**)、

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

$$\Leftrightarrow f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

となる (x, y, z) の方程式（接平面の方程式）が得られる．

4-2. 合成関数の微分法 I ••• (x, y)-平面上に、$(x(t), y(t))$ をおく．このとき合成関数 $F(t) = f(x(t), y(t))$ の $t = t_0$ での微分は、

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)$$

つまり

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

となる．

4-3. 合成関数の微分法 II ••• 関数 $z = f(x, y)$ と、$x = \varphi(s, t), y = \psi(s, t)$ に対して、$z = F(s, t) = f(\varphi(s, t), \psi(s, t))$ とすると、次が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial s} & \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}$$

この後ろの 2×2 行列の行列式をヤコビアンといい、$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$ とかく．

4-4. 偏微分の順番の交換可能のための十分条件 ••• (a, b) において、$f_x(a, b), f_y(a, b), f_{xy}(a, b), f_{yx}(a, b)$ が存在し、もし、f_{xy} と f_{yx} が連続ならば、(a, b) において $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ となる．

今日の課題.

1. 合成関数の微分法.

小テスト-4. [偏微分]

$f(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とする．

このとき、$f_{xx} = f_t$ を示せ．

宿題-4-1. [全微分可能性]

$f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$ とする．このとき、$f(x, y)$ は連続であるか？また、全微分可能であるか？

問題-4-2. [合成関数の微分法]

つぎの関数を合成してできる関数 $F(t)$ の t での微分を合成関数の微分法を用いて求めよ．

(1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2,\ \ x = 2t^2,\ y = t + 1$

(2) $f(x,y) = \sin(xy),\ \ x = 2t + 1,\ y = t^2 + t$

(3) $f(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x),\ \ x = \log(t),\ \ y = \log(t)$

(4) $f(x,y) = x^3 + y^3, x = \cos t, y = \sin t$

(5) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}, x = \cos t, y = \sin t$

問題-4-3. [合成関数の微分法]
次の関数の $(x,y) = (2 + \cos\theta, \sin\theta)$ における θ-微分を合成関数の微分法を用いて求めよ.

(1) $f(x,y) = x + y$

(2) $f(x,y) = xy$

(3) $f(x,y) = \tanh(x^2 + y^2)$

(4) $\dfrac{1}{1 + x^2y^2}$

問題-4-4. [合成関数の微分法]
次の関係式を確かめよ.

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x^2 + xy) = 2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2, xy) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2, xy)$

(2) $\dfrac{d^2}{dt^2}(f(x + ht, y + kt))|_{t=0} = h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

宿題-4-1. [合成関数の微分法]
合成関数の微分法を用いて、以下のように、x^{x^2} の計算をせよ.

(1) $f(t,t)$ の t-微分を $f(x,y)$ の x,y の偏微分を用いた公式にせよ.

(2) $f(x,x) = x^{x^2}$ となるような関数 $f(x,y)$ を作れ.

(3) (2) の $f(x,y)$ と、(1) の公式を用いて、x^{x^2} の x-微分を計算せよ.

宿題-4-2. [連続性]

$$\frac{x^6 + y^8}{x^4 + y^2}$$

が原点で連続であることを示せ.

宿題-4-3. [合成関数の微分法]
a, b は定数で、$ab \neq 0$ を満たすとする．関数 $f(x,y)$ が任意の x,y に対して

$$b\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

を満たすならば、適当な 1 変数関数 g を用いて、$f(x,y) = g(ax + by)$ と表されることを示せ.

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html**
blog：**http://motochans.blogspot.jp/**

Twitter: BasicMathIIB