

**第5回** ('15年10月30日：Keywords・・・合成関数の微分法Ⅱ)**今日の課題.**

## 1. 合成関数の微分法Ⅱ.

**小テスト-5.** [合成関数の微分]

合成関数の微分法を用いて次の関数  $f(t)$  の微分を計算せよ.

$$f(t) = t^{2t^3}$$

**問題-5-1.** [合成関数の微分法Ⅱ]

次の関数を合成した関数  $F(u, v)$  の  $u, v$  に関する偏微分を合成関数の微分法を用いて計算せよ.

$$(1) z = xy^2 + x^2y, x = u + v, y = u - v$$

$$(2) z = \sin(x - y), x = u^2 + v^2, y = 2uv$$

$$(3) z = f(x, y), x = 2u - 3v, y = u - 5v$$

$$(4) z = f(x + 3y), x = u - 2, y = u - 4v$$

**問題-5-2.** [一次近似式]

次の関数  $z = f(x, y)$  の指定された点  $(a, b, f(a, b))$  での一次近似式（接平面の方程式）を求めよ.

$$(1) f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$(2) f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

$$(3) f(x, y) = xy$$

$$(4) f(x, y) = \frac{y^3}{1 - x^2y}$$

**問題-5-3.** [合成関数の微分法]

次の変換のヤコビ行列及びヤコビアンを計算せよ.

$$(1) x = au + bv, y = cu + dv$$

$$(2) x = r \cosh y, y = r \sinh t$$

$$(3) x = u + v, y = uv$$

$$(4) x = uv, y = u^2 - v^2$$

**問題-5-4.** [変数変換]

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  とすることで、次の式を極座標  $r, \theta$  を用いて表せ.

$$(1) x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$(2) x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$(3) \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

$$(4) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$(5) y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

### 宿題-5-1. [合成関数の微分法]

$x(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \cos \phi, y(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \sin \phi, z(r, \theta, \phi) = r \cos \theta$  と  $f(x, y, z)$  との合成関数を  $f^*(r, \theta, \phi)$  とおくとき、次の等式が成り立つことを示せ.

- (1)  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial f^*}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f^*}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial f^*}{\partial \phi}\right)^2$
- (2)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f^*}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial f^*}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f^*}{\partial \phi^2} \right)$
- (3) 上の変換によるヤコビアン  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}$  を求めよ.

### 宿題-5-2. [全微分可能性]

つぎの証明のどこが不十分か答えなさい. 十分な証明のためにはどのような議論を補うとよいか.

### 宿題-4-2. [全微分可能性]

$f(x, y) = xy$  が点  $(a, b)$  で全微分可能であることを定義に基づいて示せ.

(解答)  $h = x - a, k = y - b$  とおく.

$$f(x, y) - f(a, b) - bh - ak = xy - ab - bh - ak = hk$$

となる. ここで、 $h = k$  とおくことで、

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{\sqrt{2}h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sqrt{2}} = 0$$

これは  $hk = o(\sqrt{h^2 + k^2})$  を意味する. よって、任意の  $(a, b)$  に対して

$$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2})$$

を満たす  $\alpha = b, \beta = a$  が存在するので、 $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で全微分可能.

(証明終了)

(これは実際あった解答です.)

### 宿題-5-3. [変数変換]

変換  $2x = u^2 - v^2, y = uv$  に従って、次の式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

を  $u, v$  を用いて表せ.