微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 6 回（'15 年 11 月 13 日：Keywords $\cdots$ 極値問題）

まとめ.

6-1. 微分作用素 $\cdots$ 以下の定理は一変数のテイラーの定理の二変数版である．(a,b) において、C^n 級関数 $f(x,y)$ に対して $h = x-a, k = y-b$ とする．また、$D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ とおく．これは、(a,b) における、h,k 方向における方向微分である．作用素 D は二変数関数の一変数微分である．

6-2. テイラーの定理 $\cdots$ $h = x-a, k = y-b$ とし $F(t) = f(a+th, b+tk)$ にテイラーの定理を用いると、次のように $f(x,y)$ の D におけるテイラーの定理が得られる．$F^{(m)}(t) = \displaystyle\sum_{l=0}^{k}\binom{m}{l}h^l k^{m-l} = d^m$ となる．

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}$$

$$f(x,y) = f(a,b) + (Df)(a,b) + \frac{(D^2f)(a,b)}{2!} + \cdots + \frac{(D^{n-1}f)(a,b)}{(n-1)!} + \frac{(D^nf)(a+\theta h, b+\theta k)}{n!}$$

となるような $0 < \theta < 1$ が存在する．$f(x,y)$ が C^∞ 級関数であり、この展開の剰余項が収束すれば、$f(x,y)$ を無限級数で書くこともできる．

$$z = f(a,b) + (Df)(a,b)$$

を $f(x,y)$ の一次近似（接平面）

$$z = f(a,b) + (Df)(a,b) + \frac{(D^2f)(a,b)}{2!}$$

を $f(x,y)$ の二次近似という．

6-3. 極大点、極小点、臨界点 $\cdots$ 関数 $z = f(x,y)$ において (a,b) が**極大点**であるとは、ある (a,b) の ϵ-近傍 $B_\epsilon(a,b) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\}$ が存在して、$^\forall(x,y)\in B_\epsilon(a,b)$ に対して以下を満たすこと．

$$f(x,y) < f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) \neq (a,b)$$

また、(a,b) が**極小点**であるとは、ある ϵ が存在して、$^\forall(x,y)\in B_\epsilon(a,b)$ に対して以下を満たすこと．

$$f(x,y) > f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) \neq (a,b)$$

教科書ではこの不等号にイコールが入った形だが、この定義は狭義の極値である．関数が (a,b) において極大点（もしくは、極小点）であり、偏微分可能であれば、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つ．また、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) のことを**臨界点**もしくは**停留点**という．

6-4. 極値問題 $\cdots$ $f(x,y)$ を C^2 級関数とし、(a,b) において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つとする．このとき、次の行列を定義し

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

その行列式が $\det(H(a,b)) \neq 0$ を仮定する．このとき、

$$\begin{cases} \det(H(a,b)) > 0 \text{ かつ } f_{xx}(a,b) > 0 & \Leftrightarrow \text{極小点} \\ \det(H(a,b)) > 0 \text{ かつ } f_{xx}(a,b) < 0 & \Leftrightarrow \text{極大点} \\ \det(H(a,b)) < 0 & \Leftrightarrow \text{鞍点} \end{cases}$$

$\det(H(a,b)) \neq 0$ かつ $f_{xx}(a,b) = 0$（もしくは $f_{yy}(a,b) = 0$）であるなら、$\det(H(a,b)) < 0$ であることに注意せよ．$H(a,b)$ はヘッセ行列、$\det(H(a,b))$ をヘッシアンという．

このとき、関数 $f(x,y)$ は $h = x-a, k = y-b$ とすると、

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)h^2 + f_{xy}(a,b)hk + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)k^2 + o(h^2+k^2)$$

のように $f(x,y)$ は (a,b) において 2 次近似（2 次形式により近似）されている．グラフの曲面の曲がり方は主に 2 次近似によって影響を及ぼしている．

臨界点において、$\det(H(a,b)) = 0$ であるなら、その点は極値のときもあれば、極値でない場合もある．別な方法により解析する必要がある．

6-5. ヘッシアンと曲率 ⋯ $f_y(a,b) = f_y(a,b) = 0$ なる臨界点 (a,b) におけるヘッシアンは二つの曲率（曲がり方）の積である．

$$\det(H(a,b)) = \kappa_1\kappa_2$$

κ_1, κ_2 は $H(a,b)$ の固有値であり、$\kappa_2 \leq \kappa_1$ とすると、その固有ベクトルは、(a,b) を通り固有ベクトルの方向の曲率が、最大 κ_1 と最小 κ_2 をとる．曲率とは空間の曲がり具合のことであり、この場合その方向での 2 階偏微分と一致する．曲がり具合を決めているのは主に 2 階偏微分でる．

結局、$0 < \kappa_2 \leq \kappa_1$ であれば、その点において、どの方向も正の向きに曲がっているし、$\kappa_2 \leq \kappa_1 < 0$ であれば、どの方向にも負に曲がっている．$\kappa_2 < 0 < \kappa_1$ であれば、負に曲がっている方向と正に曲がっている方向が両方ある．

今日の課題.

1. テイラー展開、極値問題を解くこと．

小テスト-6. [合成関数の微分]

関数 $f(x,y)$ を極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を使って、$f^*(r,\theta)$ とおくとき

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f^*}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f^*}{\partial \theta}\right)^2$$

が成り立つことを示せ．

問題-6-1. [微分作用素]

$D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ とする．次の作用素を計算せよ．

(1) D^2　　(2) $D^3 + D$　　(3) D^4

(4) $D + D^2$　　(5) $\dfrac{D^3}{2} + \dfrac{D}{3}$　　(6) $1 + D + D^2 + \cdots$

問題-6-2. [テイラー展開]

つぎの関数を $(x,y) = (0,0)$ においてテイラー展開せよ．

(1) $f(x,y) = \dfrac{y^3}{1-x^2y}$　　(2) $f(x,y) = x^3ye^{xy}$　　(3) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x-y+xy}$

問題-6-3. [関数の極値 I]

次の関数の $z = f(x,y)$ での極大点、極小点を求めよ．

(1) $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$

(2) $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$

(3) $f(x,y) = xy(1 - 2x - 3y)$

(4) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

(5) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - y + 7$

(6) $f(x,y) = x^3 + 2xy - x - 2y$

(7) $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 - 4y$

問題-6-4. [極値問題 II]
次の関数の $z = f(x,y)$ での極大点、極小点を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^4 + y^2 + 3y$

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + 2xy + y^2$

(3) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 2x^2y^2$

(4) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$

宿題-6-1. [テイラー展開]
次の関数に関して以下の問題に答えよ.

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

(1) 2 次近似式を求めよ.

(2) $D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ とする. D^3 を計算し、$(0,0)$ でのテイラー展開の 3 次の項がすべて 0 になることを示せ.

宿題-6-2. [極値問題]

(1) 次の関数の極大点または極小点を求めよ. また、そのときの極大値、または極小値を求めよ.

$$f(x,y) = x^3 - x^2 + xy - y^2 - 2x + y - 7$$

(2) 次の関数は極値をもつか？教科書 128 を参考に答えよ.

$$f(x,y) = x^4 + y^2 + 2y$$

HP : `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html`
blog : `http://motochans.blogspot.jp/`
Twitter: BasicMathIIB