微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第7回

（'15年11月20日：Keywords ⋯ 極値問題II、陰関数の定理）

まとめ.

7-1. 陰関数の定理 ••• $F(x,y)$ を C^1 級関数とする．$F(x,y)=0$ を満たす点 $\boldsymbol{x}_0=(x_0,y_0)$ が $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ を満たすなら、ある ϵ が存在して、$\boldsymbol{x}_0$ の ϵ-近傍において、$F(x,y)=0$ を満たす**陰関数** $y=\varphi(x)$ が存在する．つまり、その領域において、$F(x,\varphi(x))=0$ を満たす．

7-2. 微分係数 ••• (x_0,y_0) において、関数 $F(x,y)=0$ における変数 y において陰関数定理の仮定が成り立つとする．陰関数を $y=\varphi(x)$ とすると、(x_0,y_0) の近くの $F(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) において、

$$\varphi'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

と計算できる．また、2階微分は、$\varphi''(x)=-\dfrac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$ となる．

7-3. 陰関数の接線および法線の方程式 ••• $F(x,y)$ が C^1 級であるとする．このとき、$F_y(x_0,y_0)\neq 0$ であるなら、$F(x,y)=0$ を満たす集合の (x_0,y_0) での接線の方程式は $y=-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)+y_0$ となる．また、法線の方程式は、$y=\dfrac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}(x-x_0)+y_0$ となる．

今日の課題.

1. 極値問題II
2. 陰関数の定理

小テスト-7. [極値問題]

次の関数の極点となる点を全て求め、そのときの極値を求めよ．

$$f(x,y)=x^2+2xy+3y^2+4x+8y+1$$

問題-7-1. [陰関数の定理]

次の関数 $F(x,y)$ において、関係式 $F(x,y)=0$ を x を変数とする陰関数 $y=\varphi(x)$ として局所的に解くことができる点 (x_0,y_0) の条件を求めよ．

(1) $F(x,y)=x^2+y^2-1$ (2) $F(x,y)=x^3+3xy+y^5-x+1$ (3) $F(x,y)=x^2-xy+y^3-7$

問題-7-2. [陰関数の接線、法線]

つぎの方程式 $F(x,y)=0$ を与えれた点 (a,b) における接線、法線の方程式を求めよ．

(1) $F(x,y)=3x^2-xy^2+2xy+y-x,\ (1,2)$ (2) $F(x,y)=xe^{2y}-e^{xy}+\sin\pi xy+y,\ (0,1)$

宿題-7-1. [陰関数の微分]

$F(x,y)$ を C^2 級関数とする．$F(x,y)=0$ を満たす領域において点 (x_0,y_0) の近くで陰関数 $y=\varphi(x)$ を持つとする．このとき $\varphi(x)$ の2階微分は

$$\varphi''(x)=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

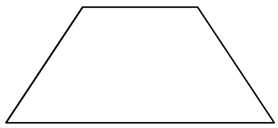
と計算できることを示せ.

宿題-7-2. [極値問題 II]

関数 $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x^2y^2$ には極値は存在するか？

宿題-7-3. [等脚台形の面積の最小値]

周の長さが $r =$（一定）となる等脚台形の面積の最小値はその台形が正方形のときであることを示せ.



HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html
blog：http://motochans.blogspot.jp/

Twitter: BasicMathIIB