微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第8回（'15年11月27日：Keywords ⋯ ラグランジュの未定乗数法）

まとめ.

8-1. 勾配ベクトル (場) ••• 関数 $z = F(x,y)$ が与えられているとする．このとき、

$$(F_x(x,y), F_y(x,y))$$

なる平面上のベクトルたちのことを関数 $F(x,y)$ の**勾配ベクトル（場）**という．勾配ベクトル場とは、各点において、$F(x,y)$ が最も増加する方向を指している．それは、$F(x,y) =$ 一定となる平面上の曲線の接線と直交する方向でもある．ベクトル場という言葉は、ある空間上に広がった各点で定まるベクトルの族のことを指す.

8-2. ラグランジュの未定乗数法•••条件 $g_i(x_1, x_2 \cdots, x_n) = 0\ (i = 1, \cdots, m)$ において関数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の極値を下のようにして求める方法である．このとき、$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ とすると、

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = F(x_1, x_2 \cdots, x_n) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \cdots, x_n)$$

とおくと、$g_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$ の条件のもとでの F の極値において、H の臨界点を与える.

例:$g(x,y) = 0$ における $F(x,y)$ の最大を求める．$g(x,y) = 0$ の陰関数を $y = \varphi(x)$ とすると、$g_x(x,\varphi(x)) + g_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$ であるから、$g_y(x,y) \neq 0$ において、 このとき、$H(x) = F(x,\varphi(x))$ の極値を求めると、$H'(x) = F_x(x,\varphi(x)) + F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = F_x(x,\varphi(x)) - F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ F_x(x,y) & F_x(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに、$\begin{pmatrix} g_x(x,y) \\ g_y(x,y) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix}$ となる λ が存在する.

今日の課題.

1. ラグランジュの未定乗数のを学び、使えるようにする．今回は条件式は一つのもののみだが、複数ある場合も同じように使えるようにするとよい.

小テスト-8. [陰関数の定理]

$F(x,y)$ を C^1 級関数とする．$F(x,y) = 0$ となる点 (a,b) に対する、C^1 級陰関数を $y = f(x)$ とする．今、$f'(a) = 0$ とすると、$f''(a) = -\dfrac{F_{xx}(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}$ が成り立つことを示せ.

問題-8-1. [陰関数の法線方向]

$F(x,y) = 0$ を満たす点 (a,b) の $F(x,y) = 0$ の法線方向のベクトルを求めよ.

(1) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ (2) $F(x,y) = xy - 1$ (3) $F(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 1$

問題-8-2. [ラグランジュの未定乗数法]

与えられた条件のもと関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ.

(1) 条件 $x^2 + y^2 = 2$, $f(x,y) = y - x$

(2) 条件 $x^2 + 2y^2 = 1$, $f(x,y) = xy$

(3) 条件 $x^2 + 3y^2 = 3$, $f(x, y) = x^2 + y^2$

(4) 条件 $x^2 - 3y^2 = 1$, $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 x + y$

(5) 条件 $x^2 - y^2 = 1$, $f(x, y) = xy$

問題-8-3. [関数の最大最小]
ラグランジュの未定乗数法を用いて、次の関数の最大最小を求めよ.

(1) 条件 $x^2 + 2y^2 = 1$ のもとでの、$x + y$ の最大値と最小値.

(2) 条件 $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ のもとでの、$x^2 + y^2$ の最大値と最小値.

(3) 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとでの、$x^3 + \sqrt{2}y$ の最大値と最小値.

(4) 条件 $x^3 - x^2 - y^2 = 0$ のもとでの、$(x + 1)^2 + y^2$ の最大値と最小値.

問題-8-4. [円盤上の極値問題]
次の関数 $f(x, y)$ の $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ における最大最小を求めよ.

(1) $f(x, y) = xy$

(2) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$

(3) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$

(4) $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2x + 3y$

宿題-8-1. [ラグランジュの未定乗数法]
条件 $g(x, y) = x^2 - \frac{1}{4}y^2 - 1 = 0$ のもとで、$f(x, y) = x^3 + y$ の極値（極大、極小）を以下のようにして調べよ.

(1) ラグランジュの未定乗数法により $g(x, y) = 0$ を満たす (x, y) において、$f(x, y)$ が臨界点となる点 (a, b) を全て求めよ.

(2) (1) の各点 (a, b) において $g(x, y) = 0$ に陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、$\varphi'(x), \varphi''(x)$ の値を求めよ.

(3) この条件のもとで、(1) における各点 (a, b) は $g(x, y) = 0$ に制限された関数 $f(x, y)$ の極値であるかどうか判定せよ.

宿題-8-2. [最大最小問題]
$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$ の $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ での最大値と最小値を求めよ.
(Hint :円の内部における極値と周上における極値を別々に求めて比較せよ.)

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html
blog：http://motochans.blogspot.jp/

Twitter: BasicMathIIB