

微積分Ⅱ演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第9回 ('15年12月11日 : Keywords ... 重積分と変数変換)

まとめ.

9-1. 変数変換 ... φ を \mathbb{R} 内の領域 D を $\varphi(D)$ に一対一に写すとき、 $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ とする .
このとき、

$$\int \int_{\varphi(D)} f(x, y) dx dy = \int \int_D f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

φ によって一点に写された写された集合がジョルダン外測度0集合であってもこの公式は成り立つ .

例: $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ なる極座標に対しては、 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ とすると、ヤコビ行列は、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ であるから

$$\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 dr d\theta = 2\pi \int_0^1 r^2 dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

などとなる .

今日の課題.

1. 重積分の計算

小テスト-9. [ラグランジュの未定乗数法]

条件式 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 上で、関数 $f(x, y) = x + y$ の最大と最小を (ラグランジュの未定乗数法を用いて) 求めよ . ただし、最大と最小の存在はわかっているとしてよい .

問題-9-1. [長方形型の領域上の積分]

D を下のような領域のとき、関数 $z = f(x, y)$ を D 上で積分せよ .

(1) $D = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = x^2 + y^2$

(2) $D = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = (x + 2y)^2$

(3) $D = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = \frac{y^2}{1 + x}$

(4) $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(5) $D = [1, 3] \times [0, 2], f(x, y) = \frac{1}{(1 + x + y)^2}$

問題-9-2. [三角形および、円盤領域の積分]

D を下の点を頂点とする三角形領域のとき、関数 $z = f(x, y)$ を D 上で積分せよ .

(1) $(0, 0), (1, 0), (0, 2), f(x, y) = xy$

(2) $(0, 0), (1, 1), (1, 0), f(x, y) = x + 2y$

D を下のような円盤領域のとき、関数 $z = f(x, y)$ を D 上で積分せよ .

(1) $\int \int_D x^2 dx dy, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

(2) $\int \int_D x dx dy, D = \{(x, y) | (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$

問題-9-3. [積分の順序]

次の積分の順序を交換せよ .

$$(1) \int_0^3 \int_{y-3}^{2y} f(x,y) dx dy \quad (2) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y) dx dy \quad (3) \int_0^1 \int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) dx dy$$

問題-9-4. [一次式による変数変換により求められる積分]
アフィン変換により、以下の積分を計算せよ。

$$(1) \int \int_D (x-y)e^{x+y} dx dy, \quad D = \{(x,y) | 0 \leq x+y \leq 2, 0 \leq x-y \leq 2\}$$

$$(2) \int \int_D \cos x \sin y dx dy, \quad D = \{(x,y) | 0 \leq x+y \leq 2\pi, 0 \leq x-y \leq 2\pi\}$$

$$(3) \int \int_D y^2 dx dy, \quad D = \{(x,y) | x \geq 0, y \leq -x+1, y \geq x-1\}$$

$$(4) \int \int_D x^2 dx dy, \quad D = \left\{ (x,y) \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

宿題-9-1. [積分計算]

次の積分を指定された領域上で計算せよ。

$$(1) \int \int_D x dx dy, \quad D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq x\} \quad (2) \int \int_D x^2 dx dy, \quad D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq x\}$$

宿題-9-2. [積分]

次の積分を計算せよ。

(2) の領域について： D は楕円を 45 度傾けた形の領域である。変数変換の仕方がわからなければ、 x もしくは y について解いて計算してもよい。そのとき、領域 D は $|x| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ のなかに含まれることは使ってもよい。

$$(1) \int \int_D (x-2y)^2 dx dy, \quad D = \{(x,y) | |x+2y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$$

$$(2) \int \int_D (x+y)(x-y) dx dy, \quad D = \{(x,y) | x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$$

HP : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/bis.html>

blog : <http://mochans.blogspot.jp/>

Twitter: BasicMathIIB