微積分II演習 担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第4.5回（'15年10月24日：Keywords $\cdots$ 連続性）

$f(x,y)=\dfrac{x^4}{x^2+y^2}$ が $(0,0)$ で全微分可能であることの証明.

この関数が連続であることは省略.

$f_x(x,y)=\dfrac{4x^3(x^2+y^2)-x^4(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ となる. $\dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$ が原点で連続であることを示せば十分.

1 点列連続を使う方法.

（証明）

0 に向かう任意の点列を $(x_n,y_n)=(r_n\cos\theta_n, r_n\sin\theta_n)$ とする. ここで、$r_n>0$ であり、$r_n\to 0$ $(n\to\infty)$ となる. よって、

$$f_x(x_n,y_n)=r_n(2\cos^5\theta_n+4\cos^3\theta_n\sin^2\theta_n)$$

となる. 三角不等式を使って、

$$\begin{aligned}|f_x(x_n,y_n)| &\le r_n|2\cos^5\theta_n+4\cos^3\theta_n\sin^2\theta_n|\le r_n(2|\cos^5\theta_n|+4|\cos^3\theta_n\sin^2\theta_n|)\\ &\le r_n(2+4)=6r_n\end{aligned}$$

ここで、$n\to\infty$ において、$r_n\to 0$ なので、任意の点列 (x_n,y_n) において、$f_x(x_n,y_n)\to 0$ がいえる.（挟み撃ちの原理.）ゆえに、任意の点列について収束がいえたので、$f_x(x,y)$ は原点で点列連続. 点列連続ならば、連続である. よって、原点で $z=f_x(x,y)$ は連続である.

2 ϵ-δ-論法を使う場合

(証明)

任意の $\epsilon>0$ をとる. ここで、$\delta=\epsilon/4$ とする. $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ となる任意の (x,y) に対して、$|x^3|\le|x|\cdot|x^2|\le|x|(|x^2|+|y^2|)=|x|(x^2+y^2)$ を使うと、

$|x^5+2x^3y^2|=|x^3|(x^2+2y^2)\le|x|(x^2+y^2)(x^2+2y^2)\le 2|x|(x^2+y^2)^2$ となるので、

$$|f_x(x,y)|=|\frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}|\le 4|x|\le 4\sqrt{x^2+y^2}<4\delta=\epsilon$$

となって、$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ であるなら、$|f(x,y)|<\epsilon$ が成り立ったので、$f_x(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることがわかる.

3 極座標を使う方法

（少し直感的な解答. ただ、途中の説明がないと意味不明になってしまいます.）

(証明)

$(x,y)\neq(0,0)$ を極座標表示をして、$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする. ただし、$r>0$ である. 第一の証明の式を使うことで、$0\le|f_x(x,y)|\le 6r$ がいえる. ここで、$(0,0)$ に向かう任意の近づき方 $(x,y)\to(0,0)$ に対して、$r\to 0$ がいえる. (x,y) の原点へのどんな近づき方でも、$0\le|f_x(x,y)|$ はいくらでも 0 に近くすることができる. いくらでも小さい $\epsilon>0$ に対して、ある点以降全て ϵ 以内に入れることができる. よって、近づき方によらず、$f_x(x,y)$ は 0 に収束するといえる. よって、$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=0$

（コメント：この解答はやはりあいまいさが残ってしまいます.「いくらでも小さくとか」その辺ですが. それを回避するために、厳密には、上のように ϵ-δ 論法を使うか点列連続を使うかしたほうが答案としては無難ということになります.