

線形代数Ⅱ演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第1回 ('15年10月7日：Keywords … 連立一次方程式、数ベクトル空間の間の線形写像の行列表示、および行列式)

まとめ.

1-1. 階段行列、簡約階段行列、先頭列 … 教科書 P.38,39 を見よ .

1-2. 階段化、簡約化 … 階段行列にすること . 簡約階段行列にすること .

1-3. 行の簡約化 … 方程式を簡単にし、方程式を解く . 注意することは、連立一次方程式を解くときは列ではなく、必ず行の基本変形をする .

1-4. 列の簡約化 … 線形写像の像を変形する .

1-5. 線形写像と連立一次方程式 … 行列 A ((m, n) -行列) を左から掛けることで、

$$L_A : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \quad (\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m)$$

という写像をつくることができる . 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を求めることは像が $\mathbf{b}$ となる L_A の逆像全体を求めることに等しい .

1-6. 連立一次方程式の解き方 例 :
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \dots$$

(1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の形に直し、行列 A を書き下す . (A は (m, n) -行列) .

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2) $(A; \mathbf{b})$ に行の基本変形を施し簡約階段行列 $(B; \mathbf{b}')$ にする . ($B\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ の解 $\mathbf{x}$ を求めることになる .)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(3) 方程式 $B\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ の中で、先頭列の変数を左辺に残したまま、非先頭列の変数を右辺に移項する .

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 9 \\ x_2 = -x_3 + 6 \end{cases}$$

(4) 右辺の文字を $(c_1, c_2, \dots)$ などとおく (先頭列の変数は c_i などの一次式になる .)

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 + 9 \\ x_2 = -c_1 + 6 \end{cases}$$

(5) 全ての変数を c_i の式にまとめる .

$$x_1 = -2c_1 + 9, x_2 = -c_1 + 6, x_3 = c_1$$

(6) 連立一次方程式の解を、いくつかのベクトルとパラメータ c_i の一次結合の形に直す . ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の場合、求められるいくつかの解のことを基本解という .)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 + 9 \\ -c_1 + 6 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1-7. 数ベクトル空間の間の線形写像を行列で表示すること … 数ベクトル空間の間の線形写像 $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ を行列 A によって表示するということは、 $f = L_A$ という行列 A を求めることである。つまり、

$$f({}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)) = A \cdot {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

となる $m \times n$ 行列 A を求めればよい。

A-1-1. [行列の簡約化]

次の行列に対して行の基本変形をし、簡約階段行列にせよ。

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A-1-2. [連立方程式]

次の連立一次方程式を解け。

$$(a) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y + z + w = 8 \\ 6x + 2y - w = -2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 2x + 3y - 3z = -5 \\ -y + z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

A-1-3. [行列によって表示すること]

次の条件を満たす線形写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ をある行列 A によって表示せよ。

$$(1) f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2) f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

今日の課題.

1. 連立一次方程式の解き方.
 2. 線形写像、線形変換、行列表示すること.
-

B-1-1. [簡約化]

次の行列を簡約化しなさい。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B-1-2. [連立一次方程式]

次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$$

B-1-3. [行列によって表示すること]

次の条件を満たす線形写像 $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ をある行列 A によって表示せよ .

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B-1-4. [行列式]

次の性質を満たす $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x_1, x_2)$ について答えよ . ただし、 λ は任意のスカラーとする .

- $f(x_1 + y, x_2) = f(x_1, x_2) + f(y, x_2)$ (もう片方の成分についても同じ .)
- $f(\lambda x_1, x_2) = \lambda f(x_1, x_2)$ (もう片方の成分についても同じ)
- $f(x_1, x_2) = -f(x_2, x_1)$
- $f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1$

(1) $f(x, x) = 0$ を示せ .

(2) $f \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) = ad - bc$ を示せ .

B-1-5. [行列の合成]

$A \in M(l, m, \mathbb{K}), B \in M(m, n, \mathbb{K}), C \in M(l, n, \mathbb{K})$ に対して、 $L_A \circ L_B = L_C \Leftrightarrow AB = C$ を示せ .

B-1-6. [合成写像がゼロ写像になる条件]

線形写像 $f \in \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^l), g \in \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ に対して、 $f \circ g = 0$ となるための必要十分条件は、 $\text{Ker} f \supset \text{Img}$ であることを示せ .

C-1-1. [ベクトル空間]

次の連立一次方程式の基本解を求め、一般解を求めよ .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

C-1-2. [行列式]

次の性質を満たす $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ を考える . ただし、 λ は任意のスカラーとする .

- (1) $f(x_1 + y, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + f(y, x_2, x_3)$ (他の成分についても同じ .)
- (2) $f(\lambda x_1, x_2, x_3) = \lambda f(x_1, x_2, x_3)$ (他の成分についても同じ)
- (3) $f(x_1, x_2, x_3) = -f(x_2, x_1, x_3)$ (他の任意の 2 つの成分の入れ替えについても同じ)

このとき、もし、標準基底ベクトル、 $e_1 = {}^t(1, 0, 0), e_2 = {}^t(0, 1, 0), e_3 = {}^t(0, 0, 1)$, に対して $f(e_1, e_2, e_3) = 1$ であるとする、 $f(x_1, x_2, x_3) = |x_1 x_2 x_3|$ となることを示せ . ここで、 $(x_1 x_2 x_3)$ は、 x_1, x_2, x_3 をこの順番に並べてできる 3×3 行列のことである .

C-1-3. [行列によって表示すること]

次の条件を満たす線形写像 $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ をある行列 A によって表示せよ .

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります . アドレスはプリント 1 ページ目上部 .