線形代数II演習 担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第10回（'15年12月16日：Keywords ··· 計量ベクトル空間）

まとめ.

10-1. 重要な次元公式 ••• 線形写像 $f : V \to W$ に対して、以下が成り立つ.

$$\mathrm{null}(f) + \mathrm{rank}(f) = n = \dim V$$

10-2. 計量ベクトル空間 ••• V は複素（or 実）ベクトル空間とする．計量ベクトル空間 $(V, (\cdot, \cdot))$ とは、内積の定まっているベクトル空間．ベクトル空間のある付加構造．計量ベクトル空間と書く場合、$(\cdot, \cdot)$ を略す場合がある.

10-3. 数ベクトル空間の標準内積 ••• よくある $\mathbb{R}^n$ の内積は、$\boldsymbol{v} = (x_1, \cdots, x_n)$、$\boldsymbol{w} = (y_1, \cdots, y_n)$ とすると、$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ である．これは、**実数ベクトル空間の標準内積**とよばれている．また、$\mathbb{C}^n$ のよくある内積は、$\boldsymbol{v} = (x_1, \cdots, x_n)$、$\boldsymbol{w} = (y_1, \cdots, y_n)$ とすると、$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$ であり、**複素数ベクトル空間の標準内積**とよばれている．複素計量ベクトル空間は一般に、$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \overline{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})}$ の性質を持つ．ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ のノルム $\|\boldsymbol{v}\|$ は $\sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ と定義する.
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をベクトル空間 V の基底とすると、$((\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j))$ はエルミート行列（実の場合は対称行列）.

10-4. 直交 ••• $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が直交するとは、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となることである.

10-5. 正射影ベクトル ••• $(V, (,))$ を計量ベクトル空間とする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を V のベクトルとする．このとき、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{w}$ への正射影ベクトル $\boldsymbol{a}$ とは、$\boldsymbol{w}$ に平行で、$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) = 0$ となるようなベクトルのことである．そのようなベクトルはただ一つ定まり、正射影ベクトルという.

今日の課題.

1. 計量ベクトル空間について理解すること．2. 直交射影ベクトルを計算すること.

A-10-1. [計量ベクトル空間]

次の積が内積を与えることを示せ.

(1) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2$

(2) $f(x), g(x) \in C([0, 1]), (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

(3) $(a_n), (b_n) \in \{(r_n) \in s(\mathbb{R})|$ 十分大きい n に対して $r_n = 0\}, ((a_n), (b_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nb_n$

(4) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2$

(5) $f(x), g(x) \in C^1([0, 1]), (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx$

A-10-2. [内積]

(1) 実計量ベクトル空間 $(\mathbb{R}^2, (\cdot, \cdot))$ が $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1, (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1, (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 2$ を満たすとき、$\|3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\|$ を求めよ.

(2) 実計量ベクトル空間 $(\mathbb{R}^2, (\cdot, \cdot))$ が $\|\boldsymbol{e}_1\| = 1, \|\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\| = 2, \|\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2\| = 3$ を満たすとき、$\|\boldsymbol{e}_2\|$ を求めよ.

A-10-3. [内積]

(1) B-10-1(1) の内積に対して、$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の内積をそれぞれ求めよ.

(2) 以下の部分ベクトル空間の直交補空間を求めよ.

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$$

(3) 以下の部分ベクトル空間の直交補空間を求めよ.

$$\{f \in P(\mathbb{R})_3 | f'(X) = 0\}$$

A-10-4. [直交射影]
次のベクトルの正射影を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ の標準計量に関して、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ への直交射影.

(2) $\mathbb{R}^3$ の標準計量に関して、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ への直交射影.

(3) $\mathbb{R}^4$ の標準計量に関して、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ への直交射影.

(4) $P(\mathbb{R})_2$ の計量 $\int_0^1 f \cdot g dx$ に関して、$f(X) = X^2 + X + 1$ の $g(X) = 2 + X$ への直交射影.

(5) $s(\mathbb{R})_0$ の計量 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ に関して、$(1, 1, 0, 0, 0, \cdots)$ の $(1, 1, 1, 1, 0, 0, \cdots)$ への直交射影.

B-10-1. [計量ベクトル空間]
以下のような計量ベクトル空間 $(V, (\cdot, \cdot))$ について問題に答えよ.

(1) $(\mathbb{R}^2, (\cdot, \cdot))$ が $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1, (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1, (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 2$ を満たすとき、
$\|3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\|$ を求めよ.

B-10-2. [商空間の基底]
V の基底を任意に取る．この基底の部分集合をとると、必ず V/W の基底を構成するものが存在することを示せ.

B-10-3. [商空間からの線形写像を作るための必要十分条件]
U, V をベクトル空間とし、W を V の部分空間とする．線形写像 $F : V \to U$ が自然に線形写像 $f : V/W \to U$ を誘導するためには、$\mathrm{Ker}(F) \subset W$ となることが必要十分であることを示せ.

B-10-4. [線形写像がリフトすること]
U, V をベクトル空間とし、W を V の部分空間とする．商空間から U への線形写像 $f : V/W \to U$ に対して、ある線形写像 $\tilde{f} : V \to U$ が存在して、$\tilde{f}([\boldsymbol{v}]) = f(\boldsymbol{v})$ とできることを示せ.

B-10-5. [ベクトル空間の線形写像による分解]
V をベクトル空間とする．$f : V \to V$ を線形写像とする．このとき、$V \cong \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ となることを示せ.

B-10-6. [表現行列]
以下の線形写像 F に対して指定の基底を使った表現行列を求めよ.

(1) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, F(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\\4&3\end{pmatrix}\boldsymbol{v}$, $\{e_1,e_2\},\{e'_1,e'_2,e'_3\}$ それぞれ標準基底

(2) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}7&-6\\3&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{v}$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

(3) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ F(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}2&4&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{v}, \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$

(4) $F:P(\mathbb{R})_2\to P(\mathbb{R})_2,\ F(f(X))=2f'(X)+3f(X),\ \{1,X,X^2\}$

B-10-7. [有限体上の内積]
p を素数とする．$\mathbb{F}_p$ 上のベクトル空間 V において、V 上の任意の内積は構成できないことを示せ.

B-10-8. [第一同型定理]
$f:U\to V$ をベクトル空間の間の全射線形写像とする．V' を V の部分空間とし、$U'=\{\boldsymbol{u}\in U|f(\boldsymbol{u})\in V'\}$ とおく．このとき、以下を示せ．ただし、$\cong$ は、同型写像を意味する.

(1) U' は U の部分空間である.

(2) $U/U'\cong V/V'$ である.

C-10-1. [内積]
以下のような計量ベクトル空間 $(V,(\cdot,\cdot))$ について問題に答えよ.

(1) $(\mathbb{R}^2,(\cdot,\cdot))$ が $\|\boldsymbol{e}_1\|=1, \|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\|=2, \|\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2\|=3$ を満たすとき、$\|\boldsymbol{e}_2\|$ を求めよ.

(2) $(\mathbb{C}^2,(\cdot,\cdot))$ が $\|\boldsymbol{e}_1\|=1, (\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=5+i, (2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2)=3-2i$ を満たすとき、$\|\boldsymbol{e}_2\|$ の値を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の標準計量に関して、${}^t(15,2,1)$ の ${}^t(-1,1,2)$ への直交射影.

C-10-2. [直交性と一次独立性]
零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ が互いに直交するとき、これらのベクトルは一次独立であることを示せ.

C-10-3. [直交補空間]
$V=\mathbb{R}[x]_2$ とし、V 上に A-10-1(2) の内積をいれておく．$W=\left\langle x-\dfrac{1}{2}\right\rangle$ とする．以下の問題に答えよ.

(1) $W^{\perp}=\{\boldsymbol{v}\in V|(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0,\forall\boldsymbol{w}\in W\}$ は V の部分ベクトル空間を成すことを示せ.

(2) $W^{\perp}$ の基底を求めよ.