線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第11回（'16年1月13日：Keywords ··· シュミットの直交化、双対空間）

まとめ.

11-1. シュミットの直交化 ••• 計量ベクトル空間 V があり、一次独立なベクトル $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ があるときに、それらのベクトルを使って $\langle \boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\rangle = \langle \boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\rangle$ を満たすように正規直交ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ を得る方法.

11-2. $s(\mathbb{R})$ の部分空間 ••• $s(\mathbb{R})_0 = \{(a_n)\in s(\mathbb{R})|$ 十分大きい n に対して $a_n = 0\}$

11-3. 双対空間 ••• V, W をベクトル空間として、$\mathrm{Hom}(V,W)$ はベクトル空間である．$W=\mathbb{C}$ のとき、$V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$ を V の双対空間といい、$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間という．$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\cdots,\boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする．このとき、$f_j(\boldsymbol{v}_i)=\delta_{ij}$ となるようなベクトル $f_i\in V^*$ は V^* 上の基底となり、$\{f_1,\cdots,f_n\}$ を V^* の双対基底という.

数ベクトル空間の双対ベクトルは、$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ として表せるので、ある、横ベクトル $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ として同一視することができる.

今日の課題.

1. シュミットの直交化ができること．2. 双対空間．双対基底を理解すること.

A-11-1. [シュミットの直交化]

シュミットの直交化を使って次のベクトルを正規直交化せよ．(1),(2),(3),(5),(6) は実標準内積であり、(4) は複素標準内積とする.

(1) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

A-11-2. [双対空間]

次のベクトル空間 V の双対ベクトル空間 V^* のついて、次のベクトル $f_i\in V^*$ は一次独立であるか調べよ.

(1) $V=\mathbb{C}^2, f_1(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=3, f_1(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})=-1, f_2(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})=0, f_2(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})=1$

(2) $V=\mathbb{C}^2\ f_1(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})=a+b, f_2(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})=a-b$

(3) $V=\mathbb{C}^2\ f_1(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})=a+b, f_2(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})=2a+2b$

(4) $V = \mathbb{C}[x]_2, f_1(1+x) = 2, f_1(1+x+x^2) = 0, f_1(x) = -1, f_2(1+x) = 2, f_2(1+x+x^2) = 0, f_2(x) = -1 f_3(1+x) = 2, f_3(1+x+x^2) = 0, f_3(x) = -1$

A-11-3. [一次独立性]
次のベクトルは一次独立か？

(1) $f_i \in (\mathbb{C}[x]_2)^* f_1(F(x)) = F(0), f_2(F(x)) = F(1), f_3(F(x)) = F(-1)$

(2) $f_i \in (\mathbb{C}[x]_2)^* f_1(F(x)) = F'(0), f_2(F(x)) = F'(1), f_3(F(x)) = F'(-1)$

(3) $\boldsymbol{w}_i \in (\mathbb{C}^3)^*, \boldsymbol{w}_1(a,b,c) = a-b-c, \boldsymbol{w}_2(a,b,c) = b-a-c, \boldsymbol{w}_3(a,b,c) = c-a-b$

A-11-4. [双対基底]
以下の数ベクトル空間の基底の双対基底を横ベクトルとして表せ.

(1) $V = \mathbb{C}^3, \boldsymbol{v}_1 = {}^t(1,1,2), \boldsymbol{v}_2 = {}^t(0,0,1), \boldsymbol{v}_3 = {}^t(1,0,1)$

(2) $V = \mathbb{C}^3, \boldsymbol{v}_1 = {}^t(1,0,1), \boldsymbol{v}_2 = {}^t(0,1,2), \boldsymbol{v}_3 = {}^t(1,1,1)$

(3) $V = \mathbb{C}^3, \boldsymbol{v}_1 = {}^t(0,1,0), \boldsymbol{v}_2 = {}^t(0,0,1), \boldsymbol{v}_3 = {}^t(1,0,0)$

B-11-1. [双対基底]
上記のように定めた双対基底が基底であることを確かめよ.

B-11-2. [数ベクトル空間上の双対基底]
ベクトル空間 V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の双対基底を $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ とする. V の基底を $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)P$ とすると、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, x_n$ の双対基底 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, y_n$ は $\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_i(\boldsymbol{v}P^{-1})$ と表せることを示せ.

B-11-3. [シュミットの直交化]
$\mathbb{R}[x]_2$ 上に -1 から 1 までの積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ として内積を入れることで、以下のベクトルを正規直交化せよ.

(1) $\{1, x, x^2\}$

(2) $\{1+x, x+x^2, 1\}$

B-11-4. [双対空間の部分ベクトル空間]
$W \subset V$ を部分空間とするとき、$\{f \in V^* |$ 任意の $\boldsymbol{v} \in W$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = 0\}$ となる V^* の部分集合は部分ベクトル空間であることを示せ. また、その次元を求めよ.

C-11-1. [シュミットの直交化]
次を $\mathbb{R}^4$ の標準内積をもつ空間のベクトルとする. シュミットの直交化を用いて正規直交基底を与えよ.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

C-11-2. [双対基底]

次の双対ベクトル $f_i : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C} \quad (i = 1, 2, 3)$ は一次独立であるか、答えよ.

$$\begin{cases} f_1(0,0,1) = 1, f_1(1,2,1) = 1, f_1(-1,2,3) = -1 \\ f_2(0,1,0) = 1, f_2(2,1,1) = 0, f_2(2,3,-1) = 1 \\ f_3(1,0,0) = -1, f_3(1,1,2) = -1, f_3(3,-1,2) = 0 \end{cases}$$

C-11-3. [行列から定まるある値]

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$ の基底とし、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ をその双対基底とする．このとき、正方行列 A に対して、

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i(A\boldsymbol{v}_i)$$

の値を A を用いて答えよ.

(Hint:標準基底において求めておき、値が基底の取り方に依存しないことを証明せよ．)

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html

Blog：(http://motochans.blogspot.jp/)

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.