

第12回 ('16年1月20日：Keywords・・・固有値、固有ベクトル)

まとめ.

12-1. 固有値、固有ベクトル、固有空間・・・ベクトル空間の間の線形変換 $F: V \rightarrow V$ に対して、ある ゼロではないベクトル v に対して、 $F(v) = \lambda v$ となるような λ のことを F の固有値という. V が有限次元ベクトル空間である場合、固有値は有限集合となる.

そのようなベクトルのことを固有ベクトルという. λ を固有値とすると、 $\{v \in V | f(v) = \lambda v\}$ なる空間を固有空間といい、固有値の定義から ゼロベクトル空間ではない. 固有空間はベクトル空間となる.

固有値は、 V の基底を定めたときの行列 A の行列の固有値として計算される.

12-2. 固有多項式・・・有限次元ベクトル空間の間の線形変換 $F: V \rightarrow V$ に対して、 A を V のある基底に対する F の表現行列とする. このとき、 $\Phi_F(t) := \det(tE - A)$ を F の固有多項式という. $\Phi_F(t)$ は、基底の取り方によらず F にしかよらない.

今日の課題.

1. 固有値、固有空間.

A-12-1. [固有値と固有ベクトル]

次の線形写像 $F: V \rightarrow V$ の固有値と固有空間を求めよ.

$$(1) V = \mathbb{C}^2, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(2) V = \mathbb{C}^2, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(3) V = \mathbb{C}^3, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(4) V = \mathbb{C}^3, F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(5) V = P(\mathbb{R})_2, F(f) = \frac{df}{dx}$$

$$(6) V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) | a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}, F((a_n)) = (a_{n+1})$$

$$(7) V = \mathbb{C}[x]_2, F(f(x)) = f'(x) - 2f(2x)$$

A-12-2. [固有値、固有ベクトル]

$V = P(\mathbb{C})_n$ とする. 線形変換 $F: V \rightarrow V$ を $F(f(x)) = f(1+x)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) F を適当な V の基底に関して表現行列を求めよ.

(2) F の固有値の集合を求めよ.

(3) F の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

A-12-3. [固有空間の基底]

$V = \mathbb{C}[x]_2$ として、 $F: V \rightarrow V$ を $F(f(x)) = xf(2-x) - (x-2)f(x)$ とするとき、 F の固有値と固有空間を求めよ.

B-12-1. [線形変換の固有値]

線形変換の固有値は、表現行列の固有値として計算されるが、固有値、固有多項式は、表現の仕方によらないことを示せ.

B-12-2. [線形変換のトレース]

$f: V \rightarrow V$ を線形変換とする. $\{v_1, \dots, v_2\}$ を V の基底とする. このとき、 f の変換のこの基底に関する表現行列を A とする. $\text{tr}(A)$ を A の対角成分の和として定義すると、 $\text{tr}(A)$ は f にしかよらず、基底の取り方によらないことを示せ.

B-12-3. [固有値]

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ とする. いま、 $V = \mathbb{C}[A] = \{f(A) \in M(2, \mathbb{C}) \mid f \in \mathbb{C}[x]\}$ とする. 以下の問いに答えよ. ただし、 $\mathbb{C}[x]$ は複素係数の多項式の空間とする.

- (1) V の基底をひとつ求めよ.
- (2) $F: V \rightarrow V$ として、 $F(X) = \frac{1}{2}(A \cdot X + X \cdot A)$ とする. このとき、 F の固有値と固有多項式を求めよ.
- (3) F の各固有値に対する固有空間を求めよ.

B-12-4. [線形写像の固有多項式]

F の固有値は F の固有多項式の根であることを示せ. つまり、 $F(v) = \lambda v$ かつ $v \neq 0$ ならば、 $\Phi_F(\lambda) = 0$ であることを示せ.

B-12-5. [微分写像がなす固有ベクトル.]

$V = \mathbb{C}[x]_2$ とする. このとき、 $\partial: \mathbb{C}[x]_2 \rightarrow \mathbb{C}[x]_2$ を多項式を微分写像であるとする. このとき、 ∂ の固有値、固有ベクトルを求めよ.

C-12-1. [線形変換]

F は $\mathbb{R}[x]_2$ 上の線形変換で、 $F(f(x)) = f(2x-1)$ を満たすものとする. このとき以下の問題に答えよ.

- (1) F の固有多項式を求めよ.
- (2) F の固有値を求めよ.
- (3) F の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

C-12-2. [2 次斉次式への作用]

$H_{\mathbb{R}}[x, y]_2$ を実係数の 2 次の斉次式全体とする. つまり、 $V = H_{\mathbb{R}}[x, y]_2 = \{f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y] \mid f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)\}$ である. $f(x, y) \in H_{\mathbb{R}}[x, y]_2$ とし、 $F: V \rightarrow V$ を $f(x, y) \mapsto f(x+y, x-y)$ として定義する. このとき、以下の問題に答えよ.

- (1) V の適当な基底を用いて、 F の表現行列を求めよ.
- (2) F の固有値を求めよ.
- (3) 固有空間の基底を求めよ.

C-12-3. [固有ベクトルと対角化]

ある n 次元ベクトル空間 V の線形写像を $F: V \rightarrow V$ とする. 以下が同値であることを示せ.

- (1) V のある基底が全て F の固有ベクトルとなるようにできる.
- (2) V のある基底に関する F の表現行列が対角行列となる.