線形代数 II 演習
担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 13 回（'16 年 1 月 27 日：Keywords $\cdots$ 対角化可能、対称行列の対角化）

まとめ.

13-1. 対角化可能 ••• 正方行列行列 A が対角可能であるとは、ある正則行列 P が存在して、$P^{-1}AP$ が対角行列であることである.

13-2. 対角化可能のための必要十分条件 ••• 対角化可能であるための必要十分条件は、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ を $n\times n$ 行列 A の固有値とし、W_{λ_i} を λ_i の固有空間としたとき、

$$\mathbb{C}^n = W_{\lambda_1}\oplus W_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_r}$$

が成り立つことである．これは、$\mathbb{C}^n$ において固有ベクトルからなる基底が存在することと同値である.

13-3. 対角化可能であるための十分条件 ••• $n\times n$ 正方行列 A の固有値がちょうど n 個あるとき、A は対角化可能である．つまり、固有多項式からすぐに対角化可能であることが判別できる.

13-4. 最小多項式 • • • $m_A(t)$ を $f(A) = O$ となる多項式 $f(t)$ のうち最小次数かつ最高次の係数が 1 である多項式のことととして定義する．A が対角化可能であるための必要十分条件は $m_A(t)$ が $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_r)$ と 1 次の式に分解できることである.

13-5. 対角化可能性と最小多項式 ••• 行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は、最小多項式が一次式の積（つまり重根を持たない式）となることである.

13-6. 正規行列 ••• 正方行列 A が $AA^* = A^*A$ となるもの.
　直交行列 $\cdots$ 実正方行列 A が $A^tA = E$ となること.
　エルミート行列 $\cdots$ $A^* = A$ となる行列.

13-7. ユニタリー行列 ••• $AA^* = E$ となる行列．つまり、A の列ベクトルか行ベクトルが正規直交基底であること．実ユニタリー行列は直交行列のことである.

13-8. 正規行列の対角化 ••• 正規行列はユニタリー行列によって対角化できる．つまり、正規行列の固有空間は互いに直交する．よって、対称行列、直交行列、ユニタリー行列、エルミート行列はユニタリー行列によって対角化できる.

13-9. 直交行列による対角化 ••• 実対称行列の固有地は実数なので、任意の実対称行列は直交行列によって対角化できる.

今日の課題.

1. 行列の対角化可能かどうか判定できるようにする．2. 対称行列の対角化について．3. 最小多項式について

A-13-1. [対角化可能性]
次の行列は対角化可能か？対称行列の場合は、直交行列によって対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}1&a\\0&-1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix}-1&-1\\4&3\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(10) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B-13-1. [最小多項式]
次の行列の最小多項式 $M_A(t)$ を求め、次の行列が対角化可能かどうか判定せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C-13-1. [対角化可能]
次の行列を A とする.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき、以下の問題に答えよ.

(1) 固有値とその固有値に関する固有空間を求めよ.
(2) この行列が対角化できるかどうか判定せよ.

C-13-2. [対角化可能性と正則行列 P]
行列 A を $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．このとき、以下の問題に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.
(2) 行列 A が対角化可能かどうか判定し、もし可能であれば $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 P を一つ求めよ.

C-13-3. [2×2 直交行列]
2×2 の直交行列 A はある実数 θ を用いて、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ もしくは $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ と書けることを示せ.
前者は θ 回転、後者は傾き $\theta/2$ の直線に関する線対称移動を表す.

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html
Blog：(http://motochans.blogspot.jp/)

相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.