

線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第14回 ('16年2月3日：Keywords・・・射影子、常微分方程式)

まとめ.

14-1. e^A の値・・・ e^A を e^x のテイラー展開を使って

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

として定義する .

14-2. 定数係数線形微分方程式・・・ $a_1, \dots, a_{n-1}$ を定数としたとき、関数 $x(t)$ の n 次常微分方程式

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0$$

は $x(t) = {}^t(x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ とおくと、ある行列を A とし、

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

とかくことができる .

14-3. $x'(t) = Ax(t)$ の解法・・・ $x(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ とする . $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$ を用いることで、

$$x(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} \text{ と解くことができる .}$$

14-4. 常微分方程式・・・

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0$$

の解 $x(t)$ は n 次多項式 $y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 = 0$ の解を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とするとき、 $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ の一次結合となる . λ が r 重解であるとき、 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{r-1}e^{\lambda t}$ が解となる .

今日の課題.

1. 常微分方程式を解くこと .

A-14-1. [射影子]

次の行列が射影子であることを示せ .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A-14-2. [e^{tA} の値]

次の A において、 e^{tA} を計算せよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A-14-3. [行列の固有空間]

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ($b \neq 0$) とする．この行列の固有空間を求め、それらが直交していることをたしかめよ．

B-14-1. [射影子]

$A^2 = A$ となる正方行列が与えられるとき、 $V \subset \mathbb{C}^n$ であって、 $\mathbb{C}^n = V_1 + V_2$ なる分解が存在し、 V_1 への L_A の制限は、恒等写像であり、 V_2 への L_A の制限は 0-写像であるものが存在することを示せ．

B-14-2. [e^A の可換性]

以下の問いに答えよ．以下、 2×2 行列で答えて構わない．

- (1) $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を A の固有値とすると、 e^A の固有値は $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}$ であることを示せ．
(2) $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ となるか？また、 A, B にどのような条件があれば、可換となるか．

B-14-3. [定数係数常微分方程式]

次の微分方程式を求めよ．

$$(1) x'' + 2x' - 3x = 0$$

$$(2) x'' - x = 0$$

$$(3) x'' + 2x' + x = 0$$

$$(4) x''' - 2x'' - 5x' + 6x = 0$$
