第15回 ('16年2月10日 : Keywords ... 定期テスト)

今日の課題.

1. 以下の問題を自分の力だけで解くこと.

問題 15-1. [商空間、双対空間]

商空間、双対空間のどちらかを選び、それについて習ったこと、および、知っていることについて説明をせよ。(15)

問題 15-2. [一次独立なベクトル]

以下の多項式のうち一次独立なものを選び、その他の多項式をその一次独立な多項式の一次結合で表せ。(15)

$$\{1 + 2x, -1 + x - x^2, 3 + 3x + x^2, 1 + x^2, -3 + 4x - 4x^2\}$$

問題 15-3. [2次以下の多項式]

2次以下の多項式全体のうち、関数等式 $f(x) = f(1-x)$ を満たすもの全体はどのようなベクトル空間となるか?(10)

問題 15-4. [対角化できない行列]

対角化できない行列の例を挙げ、その行列の固有値、固有空間、最小多項式など必要な計算をした上で、その行列が対角化できないことを議論せよ。(20)
(ヒント 2×2 行列としてもそのような行列を作ることはできる.)

問題 15-5. [どの2つも一次独立なベクトルの列]

あるベクトル空間において、 v_1, v_2 を一次独立なベクトルとする。 $n > 2$ なる自然数に対して、ベクトル v_n を $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ によって帰納的に定義する。 $V = \langle v_1, v_2, v_3, \dots \rangle$ とおく。ただし、 V はこれらの無限個のベクトル $\{v_n | n = 1, 2, \dots\}$ のうち有限個のベクトルの一次結合からなるベクトル空間である。このとき、 $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ のうちどの2つを選んでも一次独立であることを示せ。(20)

おまけ問題 15-6. [これは必ずしも解く必要はありません.]

問題 15-5 について、 $v_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k$ と定義し直したときはどうか?(?)