

線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第2回 ('15年10月14日：Keywords ...) 部分空間、一次独立、基底

まとめ.

2-1. 部分空間 ... 数ベクトル空間の部分集合 W で、ベクトルの和とスカラー倍で閉じているもの .
つまり、任意の $v, w \in W$ と任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して、 $v + w \in W$ かつ、 $\alpha v \in W$ を満たす .

2-2. 線形写像 ... 写像 $f: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ が線形写像であるとは、 $f(v+w) = f(v)+f(w)$ かつ、 $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ を満たすことである .

2-3. 核 ... 線形写像 $f: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ に対して、 $\text{Ker}(f) = \{v \in \mathbb{K}^m | f(v) = 0\}$ とする .

2-4. 像 ... 線形写像 $f: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$ に対して、 $\text{Im}(f) = \{f(v) \in \mathbb{K}^n | v \in \mathbb{K}^m\}$ とする .

2-5. 一次結合、一次関係 ... ベクトル v_i とスカラー c_i を用いて、 $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ のような式を一次結合という . また、 $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ のような関係式のことを一次関係 (式) という .

2-6. 一次独立、一次従属 ... $\{v_1, \dots, v_n\}$ が一次独立であるとは、一次関係式 $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ が成り立つならば、 $c_1 = c_2 = \dots = 0$ となることをいう . 一次独立でないとき、そのベクトルは一次従属であるという .

2-7. 基底 ... $\{v_1, \dots, v_n\}$ が数ベクトル空間 V において基底であるとは、それらが一次独立であり、任意の $v \in V$ に対して $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ であることである .

2-8. いくつかのベクトルたちで張る部分空間 ... $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{c_1 v_1 + \dots + c_n v_n | c_i \in \mathbb{K}\}$ とし、 $\{v_1, \dots, v_n\}$ で張る部分空間という .

今日の課題.

1. 部分空間、核、像
2. 一次独立、基底 .

A-2-1. [線形写像の核、像]

次の行列 A から作られる線形写像 L_A の核、像を求めよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

A-2-2. [一次独立]

次のベクトルは一次独立か、一次従属か調べよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A-2-3. [基底]

次のベクトルは、 $\mathbb{C}^n$ の基底となるか？

$$(1) \{ {}^t(1, 1, 1), {}^t(2, 3, 5), {}^t(-1, 0, 3) \}$$

$$(2) \{ {}^t(1, -6, 3), {}^t(1, -7, 4), {}^t(-1, 5, -2) \}$$

$$(3) \{ {}^t(0, -3, 0, 1), {}^t(4, 5, 2, -2), {}^t(3, -3, 1, 0), {}^t(-1, -1, 0, 1) \}$$

B-2-1. [基底]

次のベクトルが基底となるような、 $a, b \in \mathbb{C}$ の値の範囲を求めよ．またそのような a, b の例をあげよ．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B-2-2. [連立一次方程式の解の存在条件]

連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

の解が存在する必要十分条件は、係数行列 $A = (a_{ij})$ と数ベクトル $b = {}^t(b_1, \cdots, b_n)$ に対して、 $b \in \text{Im}(L_A)$ となることであることを示せ．

B-2-3. [連立一次方程式]

前の問題の解が存在し、そのひとつを x_0 とするとき、解全体は、 $\{x_0 + x | x \in \text{Ker}(L_A)\}$ と表されることを示せ．

B-2-4. [いくつかのベクトルで張られる部分空間]

- (1) $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{K}^n$ とする． $\langle a_1, a_2, \cdots, a_{m-1} \rangle = \langle a_1, a_2, \cdots, a_m \rangle$ が成り立つならば、 a_m は $a_1, \cdots, a_{m-1}$ の一次結合で書けることを示せ．
- (2) $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1} \in \mathbb{K}^n$ を一次独立なベクトルとする． $\langle a_1, a_2, \cdots, a_{m-1} \rangle \neq \langle a_1, a_2, \cdots, a_m \rangle$ が成り立つならば、 $a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m$ も一次独立であることを示せ．

B-2-5. [部分空間]

- (1) 次の集合は、 $\mathbb{C}^3$ の部分空間となるか？なる場合は証明を、そうではない場合は理由を付してこたえよ．

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad W &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \right\} \\ \text{(b)} \quad W &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

- (2) V, W を $\mathbb{K}^n$ の部分空間とする．このとき、 $V \cap W$ も $\mathbb{K}^n$ の部分空間であることを示せ．

- (3) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．このとき、 v_1, v_2 を含むような $\mathbb{K}^2$ の部分空間は $\mathbb{K}^2$ のみであることを示せ．

B-2-6. [正則行列であるための同値条件]

$A \in M(n, \mathbb{K})$ に対して、次が同値であることを示せ．

- (1) L_A が単射である .
- (2) L_A が全射である .
- (3) L_A が全単射である .
- (4) A は正則である .

B-2-7. [Im(f)]

行列 A の縦ベクトルを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ とすると、 $\text{Im}(L_A)$ は $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ に等しいことを示せ .

B-2-8. [線形写像]

線形写像 $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ を決定するためには $f(\mathbf{e}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) の行先を全て決めれば一通りに決まることを示せ . ここで $\mathbf{e}_i$ は数ベクトル空間の標準基底のこととする .

B-2-9. [基本変形]

$m \times n$ 行列 A に基本変形を施した行列を A' とする . このとき、 ${}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ に対して、下が成り立つことを示せ .

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

B-2-10. [R_A の行列表示]

$n \times m$ 行列 A に対して、 $R_A: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ を、 $R_A(\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{v} \cdot A$ として定義する . このとき、以下の問題に答えよ .

- (1) R_A は線形写像であることを示せ .
- (2) $R_A = L_{{}^tA}$ であることを示せ .

B-2-11. [数ベクトル空間上の基底]

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ をある数ベクトル空間 $\mathbb{C}^m$ の基底とする . このとき、 $n = m$ であることを示せ .

B-2-12. [数ベクトル空間上の基底]

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ をある数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ のベクトルとする . このベクトルを縦ベクトルとして、並べた行列 $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ が正則であることと、このベクトルが $\mathbb{C}^n$ の基底であることは同値であることを示せ .

C-2-1. [線形写像の核と像]

次の行列 A に対して $L_A: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ について答えよ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) L_A は単射であることを示せ .
- (2) $n \in \mathbb{N}$ を適当に与えてやることで、 $\text{Im}(L_A)$ をちょうど核とするような線形写像 $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^n$ を与えよ .

C-2-2. [行列表示]

A を次のような行列とする .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、合成写像 $R_{A^{-1}} \circ L_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ をある行列 B によって、 L_B として行列表示せよ .

C-2-3. [一次関係式]

$u + v + w = \mathbf{0}$ を満たすベクトルを

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

とし、次のような行列に対する線形写像 $L_A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を考える .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) $L_A(u') = u, L_A(v') = v, L_A(w') = w$ なる非ゼロベクトル $u', v', w' \in \mathbb{C}^3$ で、 $u' + v' + w' = \mathbf{0}$ を満たすものを見つけよ .
- (2) $L_A(u') = u, L_A(v') = v, L_A(w') = w$ なるベクトル $u', v', w' \in \mathbb{C}^3$ で、 $\mathbb{C}^3$ 上基底となるものを見つけよ .

ホームページ : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります . アドレスはプリント 1 ページ目上部 .