線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第3回（'15年10月21日：Keywords ··· ベクトル空間、部分ベクトル空間、基底）

まとめ.

3-1. ベクトル空間 ••• 加法とスカラー倍が定義されている集合で、教科書の定義 6.1 の性質を満たすもの．$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、実数係数多項式全体 $\mathbb{R}[x]$、実数列全体 $s(\mathbb{R}) = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{R}\}$、

3-2. 部分（ベクトル）空間 ••• $W \subset V$ が V の部分（ベクトル）空間であるとは、$W \neq \emptyset$ かつ、任意の $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in W, \alpha \in \mathbb{C}$ に対して V の加法とスカラー倍を使って、(1) $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$ かつ (2) $\alpha \cdot \mathbf{v} \in W$ を満たす集合のこと．

ベクトル空間の部分ベクトル空間はベクトル空間である．

3-3. 基底 ••• $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ ベクトル空間 V の基底であるとは、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立で、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ がこれらの一次結合 $c_1\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$ として表されるということ．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立とは、$c_1\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = 0$ ならば、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ を意味する．

有限生成なベクトル空間の次元はその基底の数と定義する．

ベクトル空間が有限生成とは、ある有限個のベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在して、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ がこれらのベクトルの一次結合で書けることをいう．

3-4. $\mathbb{K}[x]$ ••• $\mathbb{K}$ を係数とする多項式関数の集合．$\mathbb{K}[x]_n$ によって $\mathbb{K}[x]$ 内の n 次以下の多項式全体を表す．

今日の課題.

1. 抽象ベクトル空間とは何か？計算しながら理解すること．
有界数列全体 $\{(x_n) \in s(\mathbb{R}) | \ {}^\exists M \text{ s.t. } |x_n| < M, {}^\forall n \in \mathbb{N}\} \subset s(\mathbb{R})$、$\mathbb{K}[x]_3 \subset \mathbb{K}[x]$....
2. 抽象ベクトル空間の基底とは何か？数ベクトル空間と一般のベクトル空間がどのように違うのか？

A-3-1. [ベクトル空間であること]

次の集合はベクトル空間であることを示せ．

(1) $V = \mathbb{C}^2$

(2) $V = \mathbb{R}[x]_3$ (高々2次の $\mathbb{R}$ 係数の多項式)

(3) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | 2x_1 - x_2 = 0 \right\}$

(4) $\mathbb{C}$　($\mathbb{R}$ 上ベクトル空間として)

A-3-2. [ベクトル空間]

次の集合は（通常のベクトルの和とスカラー倍として）ベクトル空間にならないことを示せ。

(1) $V = \{f(X) \in \mathbb{R}[x]_4 | f(0) = 0, f(1) = 1\}$

(2) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | 2x_1 - x_2 = 1 \right\}$

A-3-3. [基底]

次のベクトル空間の基底を一つ求めよ．

(1) $\mathbb{R}[x]_2$

(2) $\left\{ \boldsymbol{v} = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \right\}$

A-3-4. [基底]
次のベクトルはベクトル空間 V において基底であることを示せ.

(1) $V = \mathbb{C}[x]_2, \{x, x^2 + 1, 2 - x + x^2\}$

(2) $V = \mathbb{C}[x]_3, \{1 + 2x, 2 + 3x - x^3, 1 - x + 2x^2, 1 + x + x^3\}$

(3) $V = \{v \in \mathbb{C}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ とする. $\{{}^t(1, -1, 0), {}^t(0, 1, -1)\}$

B-3-1. [ベクトル空間であること]
次の集合はベクトル空間になることを示せ.

(1) 有界数列全体.

(2) $[0, 1]$ 上の連続関数全体 $C([0, 1])$.

B-3-2. [係数が ±1 となる多項式]
$\mathbb{C}[x]_2$ において、x^i の係数が ±1 となるベクトルの中から、$\mathbb{C}[x]_2$ 上で基底となるようなものが選ぶことができるか？

B-3-3. [連立一次方程式の解の空間の基底とその次元]
2×4 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ を考える. $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n | A\boldsymbol{v} = 0\}$ と定義する. このとき、V の基底と、その次元を求めよ.

B-3-4. [正の実数上のベクトル空間]
教科書 p139 例 6.2 では、通常の演算では $\mathbb{R}_{>0}$（正の実数全体）はベクトル空間にならないと書いてあるが、ベクトルとしての足し算、スカラー倍を通常ではないものを入れることによって、ベクトル空間が作れるか？

B-3-5. [基底]
次のベクトルは、$\mathbb{R}[x]_7$ で基底となるか？

$$\{x^7, (x-1)^7, (x-2)^7, (x-3)^7, \cdots, (x-7)^7\}$$

B-3-6. [ベクトル空間としての第一象限]
平面上の第一象限 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$ をベクトル空間とみなすことができるか？

B-3-7. [実数列]
以下の問題に答えよ.

(1) 実数列全体 $s(\mathbb{R}) = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | x_n \in \mathbb{R}\}$ が自然にベクトル空間となるには、加法、スカラー倍をどのように定義すればよいか？

(2) $s(\mathbb{R})$ の中の部分集合 $s(\mathbb{R})_f$ を $s(\mathbb{R})_f = \{(x_n) \in s(\mathbb{R})|$ 有限個の n 以外全て $0\}$ とおく. このとき、V はベクトル空間であることを示せ. またその次元は有限次元ではないことを示せ.

(3) $s(\mathbb{R})_f$ の中の部分集合 $s(\mathbb{R})_{f,0}$ を $s(\mathbb{R})_{f,0} = \{(x_n) \in s(\mathbb{R}) |$ 有限個の n 以外全て 0 かつ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$ とおく．このとき、$s(\mathbb{R})_{f,0}$ はベクトル空間であることを示し、その基底は、$\boldsymbol{e}_i$, $(i = 1, 2, \cdots)$ であることを示せ．ただし、ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は、$\boldsymbol{e}_i = (x_n)$ としたときに、

$$x_n = \begin{cases} 1 & n = i \\ -1 & n = i+1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

として定義される．

B-3-8. [スカラー倍]
実平面 $\mathbb{R}^2$ 上に、ベクトルの足し算を通常どおり、スカラー倍を以下のようにすると、ベクトル空間が出来上がるか？

(1) $c \in \mathbb{R}$ に対して、$c(x, y) = (cx, -cy)$ とする．

(2) $c \in \mathbb{R}$ に対して、$c(x, y) = (cx, c^2 y)$ とする．

B-3-9. [有限生成ベクトル空間の一次独立なベクトルの最大]
V を有限生成なベクトル空間とする．このとき、ある n が存在して、V の中の任意の $n+1$ 個のベクトルが一次従属であり、また n 個の一次独立なベクトルが存在することを示せ．

C-3-1. [ベクトル空間]
次の集合は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間になるか、もしなるなら証明を、そうでないなら、理由を付して説明せよ．

$$V = \{f(x) \in \mathbb{C}[x]_3 || f(1) = f(2) = 0\}$$

C-3-2. [基底]
次のベクトルは、$\mathbb{R}[x]_2$ 上基底となるか、示せ．

$$\{1 + x - x^2, 2 + 2x + x^2, 1 - 3x + 2x^2\}$$

C-3-3. [ベクトル空間]
n 次多項式の集合 $\mathbb{R}[x]_n$ について以下の問題に答えよ．ただし、B_1, B_2 をそれぞれ、$\{1, x, \cdots, x^n\}$ および $\{1, x-1, \cdots, (x-1)^n\}$ と定義する．（もし一般の n で分からなければ、$n = 3$ でやってみてもよい.）

(1) B_1, B_2 は $V = \mathbb{C}[x]_n$ の基底であることを示せ．

(2) 任意の k $(0 \leq k \leq n)$ に対して、ベクトル x^k を $\{1, x-1, \cdots, (x-1)^n\}$ の一次結合で表せ．

(3) V の部分ベクトル空間 W には、任意の $0 \leq k \leq n$ に対してある k 次式が存在するとする．このとき、$W = V$ であることを示せ．

HP：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html
blog：(http://motochans.blogspot.jp/)
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.