線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第4回（'15年10月28日：Keywords ⋯ いくつかのベクトルを行列を用いて表示すること、一次独立である最大数、いくつかのベクトルの基底による表示）

まとめ.

4-1. いくつかのベクトルの基底による行列表示 ••• V をベクトル空間とする．$\mathcal{V}=\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m\}$ をいくつかのベクトルとし、$\mathcal{B}=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底する．このとき、$\mathcal{V}$ の $\mathcal{B}$ による一次結合

$$(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n)A$$

を $\mathcal{V}$ の基底 $\mathcal{B}$ による行列表示という．ここで、A は $n\times m$ 行列である．いくつかのベクトル $\mathcal{V}$ が基底となる必要十分条件は、A が正則であることと同値である．（定理 6.4）

4-2. 基底の変換行列 ••• 2 つの基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$、$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$ に対して

$$(\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n)=(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n)A$$

なる行列 A を、$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ を $\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n\}$ に変換する変換行列という．

4-3. いくつかのベクトルの一次関係と行列表示の一次関係 ••• いくつかのベクトル $\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m\}$ に成り立つ一次関係は、表示行列 A の列ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$ に成り立つ一次関係と一致する．

$$c_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m=0\Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_m\mathbf{a}_m=0$$

4-4. 一次独立なベクトルの最大数 ••• $\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n\}$ の中に一次独立なベクトルは、$A=(\boldsymbol{a}_1\cdots\boldsymbol{a}_n)$ の行に関して簡約化をすることで求められる．

今日の課題.

1. いくつかのベクトルを基底を使って表示すること.
2. 基底の変換行列.
3. いくつかのベクトルから一次独立なベクトルを選ぶこと.
4. いくつかのベクトルから一次関係を探すこと.

A-4-1. [行列による表示]
次のいくつかのベクトルを適当な基底に関して行列を用いて表せ.

(1) $V=\mathbb{C}[x]_3,\{1+x,1+x^2,x+x^2,x^3\}$

(2) $V=\mathbb{C}[x]_4,\{x+x^2,1+x+x^2,2x^2+x^4,1+2x^4\}$

(3) $V=\left\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^3\middle|\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{v}=0\right\},\{{}^t(1,0,-1,{}^t(2,5,-8),{}^t(1,1,1)\}$

A-4-2. [一次関係]
つぎの行列のたてベクトルの中から一次独立なベクトルを探せ．また、その他のベクトルをそれらの一次結合で表せ.

(1) $\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&3&8&3\\1&0&1&1\end{pmatrix}$

A-4-3. [基底の変換行列]
次のベクトル空間 V と 2 つの基底 $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ において、$\mathcal{B}_1$ を $\mathcal{B}_2$ にかえる基底の変換行列を求めよ．ただし、$\{\boldsymbol{e}_i\}$ は数ベクトル空間上の標準基底であるとし、下のベクトルが基底であることは示す必要はない．

(1) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)$

(2) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}_1 = ({}^t(1,1,1), {}^t(1,0,1), {}^t(1,0,0))$, $\mathcal{B}_2 = ({}^t(1,0,1), {}^t(0,0,1), {}^t(1,1,1))$

A-4-4. [一次結合性]
次のベクトル空間 V において任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は次のベクトルの一次結合で表されるか？

(1) $V = P(\mathbb{C})_2, (1, X-1, (X-1)^2)$

(2) $V = \mathbb{C}^3, ({}^t(1,0,2), {}^t(3,1,4), {}^t(-1,0,-1))$

A-4-5. [基底]
次のベクトル空間 V の基底を求めよ．

(1) $V = \{{}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(2) $V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) | (a_n)$: 等差数列 $\}$

A-4-6. [ベクトルの基底表示]
次のベクトル $\mathcal{V} = (\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m)$ を基底 $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ を使ってその表示行列を求め、$\mathcal{V}$ が基底であるか判定せよ．

(1) $V = \mathbb{C}^3, \mathcal{V} = ({}^t(1,1,1), {}^t(1,-1,1), {}^t(1,0,1)), \mathcal{B} = ({}^t(1,0,0), {}^t(1,1,0), {}^t(1,1,1))$

(2) $V = \mathbb{C}[X]_2, \mathcal{V} = (1+X^2, 1-X^2, 1+aX+bX^2), \mathcal{B} = (1, X, X^2)$

(3) $V = \mathbb{C}[X]_2, \mathcal{V} = (X^2, (X-1)^2, (X-2)^2), \mathcal{B} = (1, X, X^2)$

B-4-1. [基底の変換行列]
次のベクトル空間 V と 2 つの基底 $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ において、$\mathcal{B}_1$ を $\mathcal{B}_2$ にかえる基底の変換行列を求めよ．ただし、$\{\boldsymbol{e}_i\}$ は数ベクトル空間上の標準基底であるとし、下のベクトルが基底であることは示す必要はない．

(1) $V = P(\mathbb{C})_2$, $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$, $\mathcal{B}_2 = (1, X-1, (X-1)^2)$

(2) $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B}_1 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ $\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1)$

(3) $V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) | a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n\}$,
$\mathcal{B}_1 = ((0,1,2,7,20,\cdots), (1,0,3,6,21,\cdots)), \mathcal{B}_2 = ((2,1,8,19,62,\cdots), (3,1,11,25,83,\cdots))$

B-4-2. [ベクトルの基底表示]
次のベクトル $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m\}$ を基底 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を使ってその表示行列を求め、$\mathcal{V}$ が基底であるか判定せよ．

(1) $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \cdots, \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{v}_1), \mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \cdots, \boldsymbol{v}_n)$

(2) $V = ((a_n) \in s(\mathbb{R}) | (a_n)$: 等差数列$), \mathcal{V} = ((2,4,6,\cdots,), (1,3,5,\cdots)), \mathcal{B} = ((1,1,1,\cdots), (1,2,3,\cdots))$

(3) $V = (f(X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3] \| f(X_1, X_2, X_3)$: 3 次対称式$), \mathcal{V} = (t_1^3, t_1 t_2, t_3), \mathcal{B} = (s_1^3, s_1 s_2, s_3)$
ここで、s_i は上の対称式で書いたものと同じとし、$t_1 = s_1, t_2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$, $t_3 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ と定義する．

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}, \{ {}^t(1,-1,0), {}^t(3,-5,2), {}^t(0,1,-1) \}$

B-4-3. [いくつかのベクトルから一次独立なベクトルを最大数選ぶこと]
次のベクトル空間 V の中から一次独立なベクトルを最大数選べ．またその他のベクトルをそれらの一次結合で表せ.

(1) $V = \mathbb{C}[x]_3, \{1 + x + 3x^2, 1 + 2x - x^3, 1 + 3x - 3x^2 - 2x^3, -2 - 4x + x^2 - x^3, -1 - 4x + 7x^2\}$

(2) $V = \mathbb{C}[x]_2, \{1 + 2x, 2 + 3x - x^3, 1 - x + 2x^2, 1 + x - x^3, 3x - 2x^2\}$

B-4-4. [関数空間]
実ベクトル空間 $C([0, 2\pi])$ の部分ベクトル空間 $V = \langle 1, \cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta \rangle$ を考える．このとき、以下の問題に答えよ.

(1) $\{1, \cos^2\theta, \cos\theta\sin\theta\}$ は実数上のベクトル空間において一次独立であることを示せ.

(2) ベクトル $\{1, \cos 2\theta, \sin 2\theta\}$ を上の基底で表せ.

B-4-5. [基底の表示の一意性]
V を有限生成ベクトル空間とし、基底 $\mathcal{V}$ をひとつ選ぶ．このとき、$\mathcal{V}$ を用いた ${}^\forall\mathbf{v} \in V$ の一次結合の表し方は一意的であることを示せ.

C-4-1. [基底であるための必要十分条件]
次のベクトルから一次独立なベクトルを最大数選び出し、他のベクトルをそれらの一次結合でかけ.

$$\{1 - 4x + 7x^2, x - x^2, -1 + 5x - 8x^2, -2x + 3x^2, 1 - x + 3x^2\}$$

C-4-2. [フィボナッチ数列]
$s(\mathbb{R})$ を実数からなる数列全体の空間とする．フィボナッチ数列 (a_n) $(n \geq 1)$ とは漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列のことである．V を $s(\mathbb{R})$ の部分空間で、フィボナッチ数列全体からなるものとする．つまり、

$$V = \{(a_n) \in s(\mathbb{R}) | a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$$

である．以下の問題に答えよ．**ここでは、初項が $a_0 = 0, a_1 = 1$ となるものに限らず、任意の実数を初項とし、上の漸化式を満たすものも全てフィボナッチ数列ということに注意せよ．**

(1) $s(\mathbb{R})$ はどのような実ベクトル空間か？加法とスカラー倍を定義せよ.

(2) α, β を $x^2 = x + 1$ の 2 つの相異なる実数解とする．このとき、$\boldsymbol{v}_1 = (\alpha^{n-1})$, $\boldsymbol{v}_2 = (\beta^{n-1})$ はフィボナッチ数列であることを示せ.

(3) $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は V 上の基底となることを示せ.

(4) $\boldsymbol{w}_1 = (1, 0, 1, 1, 2, \cdots)$ と $\boldsymbol{w}_2 = (0, 1, 1, 2, 3, \cdots)$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ によって表示せよ．また、その表示行列の性質から $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ も V 上の基底であることを示せ.

C-4-3. [微分写像の像の一次関係]
$\varphi : \mathbb{C}[x]_3 \to \mathbb{C}[x]_2$ を $\varphi(f(x)) = f'(x)$ なる微分した多項式を与える写像とする.

$$\{\boldsymbol{v}_1 = 1 + x + x^2 + x^3, \boldsymbol{v}_2 = 1 - x^2 + x^3, \boldsymbol{v}_3 = 1 + x + x^3, \boldsymbol{v}_4 = x + x^3\}$$

は一次独立であるが、φ のそれらの像 $\varphi(\boldsymbol{v}_1), \varphi(\boldsymbol{v}_2), \varphi(\boldsymbol{v}_3), \varphi(\boldsymbol{v}_4)$ にはどのような一次関係が成り立つか.

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html**
Blog：(**http://motochans.blogspot.jp/**)
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.