# 線形代数 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第 6 回（'15 年 11 月 11 日：Keywords ··· 直和、共通部分）

**まとめ.**

**6-1. 次元** ••• 有限生成ベクトル空間において、基底の数は一定である．このとき、基底の数のことを次元という.

**6-2. $\{\mathbf{0}\}$ の次元** ••• $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$ と定める.

**6-3. 直和** ••• ベクトル空間 $V$ が $V = V_1 + V_2$ となり、$V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ となるとき $V$ は $V_1, V_2$ の直和といい、

$$V = V_1 \oplus V_2$$

とかく.

これは、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ と一意的に分解されることと同値である．一意的な分解とは、$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i \in V_i)$ ならば、$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_i$ を意味する.

**6-4. ベクトル空間の和（および直和）の次元公式** ••• $V_1, V_2$ が有限次元ベクトル空間とする.

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

とくに、

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

---

**今日の課題.**

1. ベクトル空間の直和を理解する.
2. 共通部分のベクトル空間.

---

**A-6-1.** [直和の条件]

次のベクトル空間 $V_1, V_2$ は $V$ において直和になるか.

(1) $\dim(V) = 3, \dim V_1 = 1, \dim V_2 = 1$

(2) $\dim(V) = 2, \dim V_1 = 1, \dim V_2 = 2$

(3) $\dim(V) = 5, \dim V_1 = 2, \dim V_2 = 2$

(4) $\dim(V) = 3, V_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, V_2 = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ ただし、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は一次独立.

(5) $\dim(V) = 3, V_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, V_2 = \langle \boldsymbol{v}_3 \rangle$ ただし、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立.

**A-6-2.** [直和であるかどうか]

次のベクトル空間 $V_1, V_2$ は $V$ において直和であるかどうか示せ.

(1) $V = \mathbb{C}^3, V_1 = \langle {}^t(1, 0, -1), {}^t(5, 1-4) \rangle, V_2 = \langle {}^t(-2, 1, 4) \rangle$

(2) $V = \mathbb{C}^3, V_1 = \langle {}^t(1, 0, -1), {}^t(0, 1, 1) \rangle, V_2 = \langle {}^t(-2, 1, 3) \rangle$

(3) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \langle {}^t(2, 1, 1), {}^t(1, 2, 0) \rangle,\ V_2 = \langle {}^t1, -1, -1) \rangle,$

(4) $V = \mathbb{C}[x]_3,\ V_1 = \left\langle 1 + x + x^2 + x^3, 1 + 3x + 3x^2 + 2x^3 \right\rangle, V_2 = \left\langle x + 2x^2, 1 + 4x + 3x^2 + 3x^3 \right\rangle$

(5) $V = \mathbb{C}^3, V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} v = 0 \right\}$

**A-6-3.** [共通部分のベクトル空間]
次の 2 つのベクトル $V_1, V_2$ の共通部分のベクトル空間の基底を求めよ.

(1) $V = \mathbb{C}^2\ V_1 = \langle {}^t(1,0), {}^t(2,1)\rangle, V_2 = \langle {}^t(1,1)\rangle$

(2) $V = \mathbb{C}^3, V_1 = \langle {}^t(1,0,-1), {}^t(0,1,1)\rangle, V_2 = \langle {}^t(-2,1,3)\rangle$

(3) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}$

(4) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}$

(5) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0 \right\}$

(6) $V = \mathbb{C}[x]_3\ V_1 = \langle 1+x, 1+x+x^2+x^3\rangle, V_2 = \langle 1, 1+x+x^3\rangle$

---

**B-6-1.** [部分ベクトル空間の次元]
$W \subset V$ を有限次元ベクトル空間 $V$ 内の部分ベクトル空間とする．このとき、$\dim(W) \leq \dim(V)$ であることを示せ．さらに、$\dim(W) = \dim(V)$ なら、$W = V$ であることを示せ.

**B-6-2.** [直和]

(1) $V_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| x_1 - x_3 = 0 \right\}, V_2 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \middle| \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \right\}$ とすると き、$\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$ となることを示せ.

(2) $V_1 = \langle 1+X, X+X^2\rangle, V_2 = \langle 1+2X+X^2, 1+X^3\rangle$ とすると、$V_1$ と $V_2$ は $\mathbb{C}[X]_3$ 上で直和にならないことを示せ.

**B-6-3.** [直和]
次のベクトル空間 $V_1, V_2$ は $V$ の和として書けるか？もし書ければ証明を、そうでない場合はそう書けないベクトルを探せ.

(1) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \right\},\ V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \right\}$

(2) $V = \mathbb{R}[x],\ V_1 = \{f(x) \in V | f'(x) = f(x)\},\ V_2 = \{f(x) \in V | f'(x) = 0\}$

(3) $V = \mathbb{C}^3,\ V_1 = \langle {}^t(1,2,-1), {}^t(0,1,1)\rangle,\ V_2 = \langle {}^t(1,1,-2)\rangle$

**B-6-4.** [共通部分のベクトル空間]
次の 2 つのベクトル空間の共通部分のベクトル空間の基底を求めよ.

(1) $V = \mathbb{C}^4, V_1 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \right\},\ V_2 = \left\{ \boldsymbol{v} \in V \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \right\}$

(2) $V = \mathbb{C}[x]_2\ V_1 = \langle 1+x+x^2, 1-x+x^2\rangle, V_2 = \langle 1+x^2, x+x^2\rangle$

(3) $V = \mathbb{C}[x]_3, V_1 = \langle 1+x, x+x^2\rangle, V_2 = \langle 1+x, x+x^2\rangle$

**B-6-5.** [直和]
ベクトル空間 $C(\mathbb{R})$ の部分集合 $X, Y$ をそれぞれ

$$X = \{f \in C(\mathbb{R}) | f(-x) = f(x)\ (\forall x)\}$$

$$Y = \{f \in C(\mathbb{R}) | f(-x) = -f(x)\ (\forall x)\}$$

で定義する.

1. $X, Y$ は共に $C(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ.
2. $W = X + Y$ は直和であることを示せ.
3. $W = C(\mathbb{R})$ は正しいか? 正しければ証明し, そうでなければ $C(\mathbb{R}) \setminus W$ の元を具体的に与えよ.

**B-6-6.** [補空間の構成]
複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ のスカラーを実数に制限することによって, $\mathbb{C}^2$ を実ベクトル空間とみなすことにする.

1. $\dim(\mathbb{C}^2) = 4$ を示せ.
2. $\mathbf{C}^2 = W \oplus \mathbb{R}^2$ をみたす $\mathbb{C}^2$ の部分空間 $W$ の基底 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を１組与えよ.

---

**C-6-1.** [直和]
次の２つのベクトル $V_1, V_2$ はベクトル空間 $V$ の直和となるか示せ.
(1) $V = \mathbb{C}^3, V_1 = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}, V_2 = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0\right\}$
(2) $V = \mathbb{C}[x]_3,\ V_1 = \langle 1 - x^3, 5 + x + x^2 - 4x^3 \rangle, V_2 = \langle -2 + x^2 + 3x^3, x^2 + x^3 \rangle$

**C-6-2.** [共通部分のベクトル空間の次元]
$V$ を４次元ベクトル空間とし、$V_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle, V_2 = \langle \boldsymbol{v}_3 . \boldsymbol{v}_4 \rangle$ を $V$ の部分ベクトル空間で、どちらも２次元とする．このとき、$V_1 \cap V_2$ の次元は、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の条件によってどのように変化するか？

**C-6-3.** [共通部分のなすベクトル空間]
ベクトル空間 $V = \mathbb{C}[x]_3$ とその部分空間

$$V_1 = \langle 1 + x + x^3, x - x^2, 1 + x - x^2 \rangle,\ V_2 = \langle 1 + x - x^3, 1 - 2x^2 \rangle$$

を考える.

(1) 共通部分 $V_1 \cap V_2$ のなすベクトル空間の基底となる**多項式**を求めよ.
(2) $V_1, V_2$ のどちらの基底も、$V_1 \cap V_2$ の基底を含む形に直せ.

---

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html**
Blog：(**http://motochans.blogspot.jp/**)
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.