線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第7回（'15年11月18日：Keywords $\cdots$ 線形写像、表現行列）

まとめ.

7-1. 線形写像 ••• V, W をベクトル空間とし、次の性質を満たす写像 $f : V \to W$ を線形写像という.
(a) 任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対して、$f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2)$
(b) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して、$f(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v})$

7-2. 同型写像 ••• 線形写像 $\varphi : V \to W$ が全単射であるとき、この線形写像を同型（写像）という.

7-3. 制限写像 ••• $\varphi : V \to W$ を線形写像とする．$X \subset V$ を部分空間とする．このとき、線形写像 $X \to W$ を $\boldsymbol{v} \in X$ に対して $\varphi(\boldsymbol{v}) \in W$ として定義する．つまり、部分空間に制限することで得られる写像のことである．このような写像を φ の制限写像といい、$\mathrm{res}_X(\varphi)$ で表す.

7-4. 表現行列 ••• $F : V \to W$ を線形写像とする．V, W の基底をそれぞれ、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ とする．このとき、$(F(\boldsymbol{v}_1), F(\boldsymbol{v}_2), \cdots, F(\boldsymbol{v}_n))$ の $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ による表示行列のことを f の表現行列という．つまり、

$$(F(\boldsymbol{v}_1), F(\boldsymbol{v}_2), \cdots, F(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)A$$

と表示したとき、A を F の表現行列という.

7-5. 表現行列と基底変換 ••• $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ から $\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_n$ への基底の変換行列を P、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ から $\boldsymbol{w}'_1, \cdots, \boldsymbol{w}'_m$ への基底の変換行列を Q とする．このとき、$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$、$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m$ に関する表現行列を A とし、$\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_n$、$\boldsymbol{w}'_1, \cdots, \boldsymbol{w}'_m$ に関する基底の変換行列を B とすると、以下の等式が成り立つ.

$$B = Q^{-1}AP$$

となる.

今日の課題.
1. 線形写像
2. 表現行列を求めること、表現行列と基底変換.

A-7-1. [線形写像]
次の写像は線形写像を与えているか？

(1) $F : V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \to \mathbb{R}^3$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $F : V = \mathbb{R}[x]_2 \to V$, $F(f(x)) = f(1-x) + f(x)$

A-7-2. [表現行列]
線形写像 $F : \mathbb{C}[X]_2 \to \mathbb{C}[X]_2$ を

$$F(a + bX + cX^2) = a + b + c + (a - b + c)X + (-a + b - c)X^2$$

とするとき、$\mathbb{C}[X]_2$ の基底 $\{1, X, X^2\}$ に関する F の表現行列を求めよ.

A-7-3. [表現行列]
以下の線形写像 F に対して指定の基底を使った表現行列を求めよ.

(1) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, F(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\\4&3\end{pmatrix}\boldsymbol{v},\ \ \{e_1,e_2\},\{e_1',e_2',e_3'\}$ それぞれ標準基底

(2) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, F(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}7&-6\\3&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{v},\ \ \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

(3) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ \ F(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}2&4&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{v},\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$

(4) $F:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2,\ F(f(x))=2f'(x)+3f(x),\ \ \{1,x,x^2\}$

A-7-4. [線形写像]
次の線形写像は単射、全射、もしくは同型のいずれになるか調べよ.

(1) $\varphi:\mathbb{C}[x]_2\to\mathbb{C}[x]_2,\varphi(f(x))=f(x)-f(2x)-f'(x)$

(2) $\varphi:\mathbb{C}[x]_2\to\mathbb{C}[x]_2,\varphi(f(x))=f(1-x)$

(3) $\varphi:\mathbb{C}[x]_3\to\mathbb{C}[x]_2,\varphi(f(x))=f(x)-f(2x)-f'(x)$

(4) $\varphi:V=\{(a_n)\in s(\mathbb{C})|a_{n+1}=a_n+3\}\to V,\varphi((a_n))=(a_{n+1})$

A-7-5. [制限写像]
次の行列 A に対する線形写像 $L_A:V\to W$ に対して、制限写像 $\mathrm{res}_Z(\varphi)$ は同型となるか調べよ.

(1) $V=\mathbb{C}^2,W=\mathbb{C}^2,A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&1\end{pmatrix},\ Z=\left\{\boldsymbol{v}\in V|\begin{pmatrix}2&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{v}=0\right\}$

(2) $V=\mathbb{C}^2,W=\mathbb{C}^2,A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&0&1\end{pmatrix},\ Z=\left\{\boldsymbol{v}\in V|\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{v}=0\right\}$

B-7-1. [表現行列]
指定された基底を用いた線形写像の表現行列を求めよ.

(1) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},L_A,A=\begin{pmatrix}3&0&1\\2&-1&1\\2&0&1\end{pmatrix}$

(2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\},L_A,A=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&0&0\\-2&0&3\end{pmatrix}$

(3) $\{1,(x-1),(x-1)^2\},\varphi(f(x))=f(1)+f(x+1)+f(x-1)$

B-7-2. [表現行列]
$\mathbb{C}^3$ の基底 $\{{}^t(1,2,1),{}^t(-1,0,1),{}^t(0,0,1)\}$ に対して、線形写像

$$F:\mathbb{C}^3\ni\mathbf{x}\mapsto\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}\mathbf{x}\in\mathbb{C}^3$$

の表現行列を求めよ.

B-7-3. [線形写像]
次の線形写像は a, b がどのようなときに同型写像となるか？

$$\mathbb{C}[x]_2 \ni f(x) \mapsto f(ax+b) \in \mathbb{C}[x]_2$$

B-7-4. [微分写像]
$\partial_x : \mathbb{C}[x]_2 \to \mathbb{C}[x]_2$ を x に関する微分が与える写像とする．つまり、$\partial_x(f(x)) = df(x)/dx$．このとき、$\mathbb{C}[x]_2$ の適当な基底を選ぶことで、∂_x の表現行列を求めよ．

B-7-5. [どの２つをとっても一次独立なベクトルたち]
ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ のうちどの２つを取っても一次独立なベクトルであるとする．このとき、この３つのベクトルは一次独立か？

C-7-1. [フィボナッチ数列]
フィボナッチ数列全体のなすベクトル空間

$$V = \{(x_n) \in \mathbb{C}^\infty | x_{n+1} = x_n + x_{n-1} (n \geq 2)\}$$

を考える．V の元を数列 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ のように表したとき、次のような数列のシフト写像

$$f : (a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots) \mapsto (a_3, a_4, a_5, a_6 \cdots)$$

を V の適当な基底を使って表現せよ．
基底は前々回の宿題で使ったもののどちらかを用いてよい．

C-7-2. [表現行列]
線形写像を以下のように定義する．

$$F : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2, F(f(x)) = f'(x)x + f(0)x^2 + f(1)$$

このとき、以下を求めよ．

(1) 基底を $S = \{1, x, x^2\}$ としたとき、F の表現行列はどのように計算されるか？
(2) 基底を $T = \{1+x, x+x^2, x^2\}$ としたとき、の F の表現行列を計算せよ．

C-7-3. [線形写像]
$\varphi : \mathbb{C}[x]_2 \to \mathbb{C}^3$ を $f(x) \in \mathbb{C}[x]_2$ に対して

$$\varphi(f) = (f(1), f(2), f(3))$$

として定義する．このとき以下の問題に答えよ．

(1) 線形写像であるか？
(2) そうだとしたら、その表現行列を求め、同型写像かどうか調べよ．

HP：**http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/sen.html**
Blog：(**http://motochans.blogspot.jp/**)
相談、質問などいつでも承ります．アドレスはプリント１ページ目上部.