線形代数II演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 8 回（'15 年 12 月 2 日：Keywords $\cdots$ 6 回の宿題の答え）

C-6-1. [直和]

次の 2 つのベクトル V_1, V_2 はベクトル空間 V の直和となるか示せ．

(1) $V = \mathbb{C}^3, V_1 = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}, V_2 = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = 0\right\}$

(2) $V = \mathbb{C}[x]_3,\ V_1 = \langle 1 - x^3, 5 + x + x^2 - 4x^3\rangle, V_2 = \langle -2 + x^2 + 3x^3, x^2 + x^3\rangle$

(略解答)

(1)$V_1 \cap V_2$ を求めると、$V_1 \cap V_2 = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\right\}$ であるから、この方程式を実際解いてみると、$V_1 \cap V_2 = \{(0, 0, 0)\}$ が成り立つ．次元公式から、$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 = 4$ が成り立つ．$V_1 + V_2$ は V の部分空間、かつ $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V) = 4$ であることから $V_1 + V_2 = V$ が成り立たなければならない．よって、$V_1 + V_2$ は V の直和となる．

(2) $\boldsymbol{v}_1 = 1-x^3, \boldsymbol{v}_2 = 5+x+x^2-4x^3, \boldsymbol{v}_3 = -2+x^2+3x^3, \boldsymbol{v}_4 = x^2+x^3$ とおく．$V_1 \cap V_2$ の任意の元は、$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = c\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4$ と書けなければならない．よって、

$$0 = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 - c\boldsymbol{v}_3 - d\boldsymbol{v}_4 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, -\boldsymbol{v}_3, -\boldsymbol{v}_4)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

が成り立ち、$1, x, x^2, x^3$ が一次独立であるので、

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

でなければならない．しかし、この行列の行列式を、2 行目に沿って展開、基本変形、展開を繰り返すことで

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

と計算できる．よって、(1) の 4×4 行列は正則ではないので、これは、連立一次方程式 (1) に ${}^t(0, 0, 0, 0)$ 以外の解 (a, b, c, d) が存在することを意味する．$V_1 \cap V_2$ には、$\{\boldsymbol{0}\}$ 以外の解が存在することになる．特に、$V_1 \cap V_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ．これは $V_1 + V_2$ が V において直和にならないことを意味する．

C-6-2. [共通部分のベクトル空間の次元]

V を 4 次元ベクトル空間とし、$V_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle, V_2 = \langle \boldsymbol{v}_3.\boldsymbol{v}_4\rangle$ を V の部分ベクトル空間で、どちらも 2 次元とする．このとき、$V_1 \cap V_2$ の次元は、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の条件によってどのように変化するか？

(略解答)

次元公式から $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) = 4 - \dim(V_1 + V_2)$ が成り立つので、$\dim(V_1 + V_2)$ を求めればよい．$V_1 + V_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\rangle$ である．よって、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\rangle$ の次元 d は、この 4 つのベクトルのうち一次独立なベクトルの最大と等しい．V の適当な基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4\}$ をとる．この基底を使って $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4)A$ とすることで、これらのベクトルの表示行列 A を得る．$d = \mathrm{rank}(A)$ となる．今後、この d, A を使って議論する．今、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が一次独立であるから、少なくとも $d = \mathrm{rank}(A) \geq 2$ である．つまり、$d = 2, 3, 4$ のどれか．

$d = 2$ となるとき、V_1 は $V_1 + V_2$ の部分ベクトル空間だから、$2 = \dim(V_1 + V_2) \geq \dim(V_1) = 2$ が成り立つので、$V_1 + V_2 = V_1$ がいえる．この条件から特に、V_2 の任意の元 $c\boldsymbol{v}_3 + d\boldsymbol{v}_4$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の一次結合で書ける．つまり、$V_2 \subset V_1$ であり、どちらも 2 次元なので、$V_1 = V_2$ となる．

$d=3$ となるとき、$\mathrm{rank}(A)=3$ であり、この条件は、$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$ のうちある 3 つが一次独立であり、かつその残りの一つは他の 3 つの一次結合で表せる．

$d=4$ となるとき、$\mathrm{rank}(A)=4$ であり、この条件は、A が正則であること、言い替えれば $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\}$ が V の基底となるときである．

まとめれば、
$\dim(V_1\cap V_2)=0 \Leftrightarrow \{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\}$ が V の基底となるとき．
$\dim(V_1\cap V_2)=1 \Leftrightarrow \{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\}$ のうち 3 つが 1 次独立であり、残りの一つがその 3 つの一次結合で表せるとき．
$\dim(V_1\cap V_2)=2 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle=\langle\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\rangle$ となるとき．
となる．

C-6-3. [共通部分のなすベクトル空間]

ベクトル空間 $V=\mathbb{C}[x]_3$ とその部分空間

$$V_1=\langle 1+x+x^3, x-x^2, 1+x-x^2\rangle,\ V_2=\langle 1+x-x^3, 1-2x^2\rangle$$

を考える．

(1) 共通部分 $V_1\cap V_2$ のなすベクトル空間の基底となる**多項式**を求めよ．
(2) V_1,V_2 のどちらの基底も、$V_1\cap V_2$ の基底を含む形に直せ．

(略解答)
(1) $\boldsymbol{v}_1=1+x+x^3, \boldsymbol{v}_2=x-x^2, \boldsymbol{v}_3=1+x-x^2, \boldsymbol{v}_4=1+x-x^3, \boldsymbol{v}_5=1-2x^2$ とする．$V_1\cap V_2$ の任意の元は、$a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2=c\boldsymbol{v}_3+d\boldsymbol{v}_4+e\boldsymbol{v}_5$ と表されるから、C-6-1 と同様な議論から

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&0\\0&-1&1&0&2\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2}$$

となる．この行列を簡約化して、

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\1&1&-1&-1&0\\0&-1&1&0&2\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&0&0&1\\0&-1&1&0&2\\0&0&1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&3\\0&0&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

となるので、(a,b,c,d,e) を解き、その基底は、$(a,b,c,d,e)=(-1,-1,-3,1,1)$ となり、$\dim(V_1\cap V_2)=1$ となる．よって $-\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=-1-x-x^3-(x-x^2)=-1-2x+x^2-x^3$ が共通部分のなすベクトル空間の基底となる．

(2) $v_6=-1-2x+x^2-x^3$ とすると、$\boldsymbol{v}_6,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ の中からこの順に一次独立なベクトルを最大数選ぶ．

$$(\boldsymbol{v}_6,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

なる表示行列が得られ、これを簡約化すると、

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ゆえに、$\boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_1$ が V_1 の基底となり、$V_1 = \langle \boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_1 \rangle$ である.

次に、$\boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5$ の中からこの順に一次独立なベクトルを最大数選ぶ.

$$(\boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5) = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

なる表示行列が得られ、これを簡約化すると、

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに、$\boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が V_2 の基底となり、$V_2 = \langle \boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ である.