

第9回 ('15年12月9日：Keywords … 商空間・準同型定理)

まとめ.

9-1. 同値関係 … 集合 X の元全体に入る以下の性質を満たす関係 $\sim$ を**同値関係**という. $x, y, z \in X$ を任意の元とする.

$$(1) x \sim x$$

$$(2) x \sim y \text{ ならば, } y \sim x$$

$$(3) x \sim y \text{ かつ } y \sim z \text{ ならば, } x \sim z$$

また、

$$C(x) = \{y \in X | x \sim y\}$$

と書き、 $C(x)$ を x を含む**同値類**という. このとき、 X 全体はいくつかの交わりのない同値類によって

$$X = \bigsqcup_{x_0 \in S} C(x_0)$$

のように書くことができる. 同値類全体の集合を $X/\sim$ のようにかく. また、 x を含む同値類の集合の元を $[x] \in X/\sim$ と書く. 特に $x \sim y$ なる2つの元は $[x] = [y]$ となる. この等式は $X/\sim$ での等式であることに注意しておく.

このように集合 X に同値関係を導入することを、**同値関係を入れる**ということがある. また、同値類全体の集合 $X/\sim$ を $\sim$ によって**同一視してできる集合**ということがある.

同値類 $\{C(x)\}$ の一つの元から X の元を一つずつ取り出したものを**代表元**という.

9-2. p 元体 $\mathbb{F}_p$ … n を整数とする. $\mathbb{Z}$ において、 $k, l \in \mathbb{Z}$ において、 $k-l$ が n で割れるとき、 $k \sim l$ として同値関係を入れたものに、普通の和積を導入したものを $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とかく. つまり、 $n \sim m$ なる関係のとき $[n] = [m]$ として書いたときに、

$$[n] + [m] = [n + m]$$

$$[n] \cdot [m] = [n \cdot m]$$

と書く. ここで、さらに n が素数 p であるとき、和に対するゼロ元 $[0]$ 以外の全ての元において掛け算の逆操作、割り算が存在する. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ にそのような商の操作を含めると、体の構造が作られる. それを $\mathbb{F}_p$ と書いて、 **n 元体**という.

$\mathbb{F}_p$ は $\{0, 1, \dots, p-1\}$ の p 個の元からなり、和積を普通の整数の和積を用い、計算結果がこの p 個の元に収まらないときは、適当に p を倍数を足すことで、 $\{0, 1, \dots, p-1\}$ に収める. また、商は、 $x \in \{1, \dots, p-1\}$ は p と互いに素であるから、 $xr + ps = 1$ なる r, s が存在する. x の逆元は r の同値類であるとする.

9-3. 商空間 … V をベクトル空間とし、 $W \subset V$ を部分ベクトル空間とする. このとき、 $v \sim w$ なる関係を、 $v - w \in W$ となることとして定義すると、 V 全体に同値関係を入れることができる. この関係を使った、同値類の集合 $V/\sim$ のことを V/W と書く. また、 V/W は以下の和によってベクトル空間となる.

$$[v] + [w] = [v + w]$$

$$\lambda \cdot [v] = [\lambda \cdot v]$$

この空間のことをベクトル空間の**商空間**という。

9-4. 準同型定理 ... $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする。このとき、 f から誘導される自然な写像 $\tilde{f}$ によって、同型写像

$$\tilde{f}: V/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$$

をつくることができる。とくに、 f が全射であれば、同型写像

$$\tilde{f}: V/\text{Ker}(f) \rightarrow W$$

が作られる。 f から誘導される自然な写像とは、 $\tilde{f}([v]) = f(v)$ のことである。

今日の課題.

1. 同値類
 2. 商空間.
-

A-9-1. [同値類]

次の関係によって、集合 X をいくつかの同値類にわけよ。そのとき、同値類の個数をもとめ、また、同値類全体はどのような集合といえるか？ I は単位区間 $[0, 1]$ とする。

- (1) $X = \mathbb{R}$, 任意の x において $x \sim (-x)$
- (2) $X = \mathbb{Z}$, $n, m \in X$ に対して、 $n - m$ が偶数 $\Leftrightarrow n \sim m$.
- (3) $X = \mathbb{R}^2$, 任意の x, y, y' $(x, y) \sim (x, y')$
- (4) $X = I \times I$, $(t, 1) \sim (t, 0)$, $(1, s) \sim (0, s)$

A-9-2. [平面上の商空間]

$X = \mathbb{R}^2$ とする。このとき、次の部分ベクトル空間 W を取ったときに V/W において、 $[(1, 2)] + [(3, 4)]$ を計算し、元の $(0, y)$ なる形の代表元を選べ。

- (1) $W = \langle (0, 1) \rangle$
 - (2) $W = \langle (1, 1) \rangle$
 - (3) $W = \langle (2, 1) \rangle$
 - (4) $W = \langle (-1, 1) \rangle$
-

B-9-1. [商空間の定義]

上の和とスカラー倍は、商空間の定義としてうまくいっていることを示せ。つまり、和とスカラー倍は、代表元のとり方によらずに定まることを示せ。

B-9-2. [ベクトル空間としての商空間]

上の定義により、商空間がベクトル空間であることを示せ。

B-9-3. [準同型定理]

$f: V \rightarrow W$ における上の自然な写像 $\tilde{f}$ は写像になっているか？つまり、代表元のとり方によらずに像を一意にさだめることができるか？

B-9-4. [商空間と補空間]

$W \subset V$ を部分ベクトル空間とする。このとき、 V/W は W の V における補空間と同型になることを示せ。

B-9-5. [商空間]

$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ とする。

- (1) $\{v_1, v_2, v_3\}$ が一次独立であるとする. $V/\langle v_3 \rangle$ は $\langle v_1, v_2 \rangle$ と同型となることを示せ.
- (2) $\{v_1, v_2, v_3\}$ が一次独立でなければ、 $V/\langle v_3 \rangle$ は $\langle v_1, v_2 \rangle$ と同型とは限らないことを示せ.

B-9-6. [商空間]

$V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ とする. $V/\langle v_3 \rangle$ は $\langle v_1, v_2 \rangle$ と同型となることを示せ.

B-9-7. [行列の空間]

A を 3×3 行列とする. $\langle E, A, A^2 \rangle$ の次元は、 A の条件を使って、どのように振舞うか?

B-9-8. [2 元体 $\mathbb{F}_2$]

$\mathbb{F}_2$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^3$ において、 $'(1, 1, 0), '(1, 0, 1), '(0, 1, 1)$ は一次独立か?

B-9-9. [2 元体 $\mathbb{F}_2$]

$\mathbb{F}_2$ 上の数ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^6$ において、 $'(1, 1, 0, 0), '(0, 1, 1, 0), '(0, 0, 1, 1), '(1, 0, 0, 1)$ は $\mathbb{F}_2^4$ の基底となりうるか?

B-9-10. [商空間からの線形写像]

V をベクトル空間とする. $W \subset V$ を部分ベクトル空間とする. $f: V \rightarrow Z$ を線形写像とする. このとき、自然に線形写像 $\tilde{f}: V/W \rightarrow Z$ が作られるためには $W \subset \text{Ker}(f)$ となることが必要十分であることを示せ.

C-9-1. [3 元体 $\mathbb{F}_3$]

3 つの元からなる集合 $\{0, 1, 2\}$ において、和積に関するテーブルを作れ. 例えば、 $\mathbb{F}_2$ の和に関するテーブルは、

+	0	1
0	0	1
1	1	0

C-9-2. [商空間]

$V = \mathbb{R}^3$ とし、 $W = \left\{ v \in V \mid \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0 \right\}$ とする. V/W の基底を対応する $\mathbb{R}^3$ の元として一

組求めよ.

(Hint: $\dim V/W$ は 2 次元である.)

C-9-3. [表現行列]

A を $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ なる 2×2 行列とする.

- (1) $V = \{a_0 E + a_1 A + \cdots + a_n A^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ とする. このとき、 V は 2×2 行列全体のなすベクトル空間 $M(2, \mathbb{R})$ のなかで、スカラーを $\mathbb{R}$ とする部分ベクトル空間であることを示せ. ここで、 E は単位行列を表す.
- (2) このとき、 V の実ベクトル空間としての基底を求め、その次元を求めよ.
- (3) $X \in V$ に対して、 A を左から書けることで、線形写像 $\mathcal{L}_A: V \rightarrow V$ が作られることを示せ.
- (4) 上の基底を用いた $\mathcal{L}_A$ の表現行列を求めよ.