トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第１回（'15 年 10 月 5 日：Keywords $\cdots$ 距離空間）

まとめ.

1-1. 距離関数 ••• ρ が距離関数であるとは、任意の X の 2 点 x, y に対して、実数 $\rho(x,y)$ が定められており以下を満たすもののことをいう.

1. $\rho(x,y) \geq 0$
2. $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. X の任意の 2 元 x, y に対し、$\rho(x,y) = \rho(y,x)$
4. X の任意の 3 元 x, y, z に対し、$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

1-2. 距離空間 ••• 集合 X とその上の距離関数 ρ が定められているとき、(X,ρ) を距離空間という.

1-3. 例 ••• I を単位閉区間 $[0,1]$ とする.

- $\mathbb{R}^\infty = \left\{(x_n) | \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{が収束する}\right\}$ と定義する．これをヒルベルト空間という.
- $C(I) = \{f(x) | f(x)$ は I 上の連続関数 $\}$

1-4. p 進付値 •••p を素数とする．$n \in \mathbb{Z}$ に対して、p と互いに素な整数 a を使って、$n = ap^r$ $(r \geq 0)$ と一意的に表せる．このとき、$\varphi_p(n) = \begin{cases} 2^{-r} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$ と定義する．この関数 φ_p を p **進付値**という.

$\boxed{\text{問題 1}}$ [距離空間]
以下の問題に答えよ．ただし、I は単位区間 $[0,1]$ のこととする.

(a) $\mathbb{R}^\infty$ は $d_\infty(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$ を距離関数とする距離空間となることを示せ.

(b) $f, g \in C(I)$ に対して、$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| | x \in I\}$ と定義する．このとき、$(C(I), d)$ は距離空間になることを示せ.

(c) $f, g \in C(I)$ に対して、$d'(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}$ として定義する．このとき、$(C(I), d')$ は距離空間となることを示せ.

(d) $\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x = (x_1, .., x_n)$ と $y = (y_1, .., y_n)$ に対して、$d_n'(x,y) = |x_1 - x_2| + \cdots + |x_n - y_n|$ とすると、d_n' は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数となることを示せ.

(e) $x, y \in \mathbb{R}^n$ を $d_n^*(x,y) = \max\{|x_i - y_i| | i = 1, .., n\}$ とすると、$(\mathbb{R}^n, d_n^*)$ は距離空間になることを示せ.

(f) $l, m \in \mathbb{Z}$ に対して、$\rho(l, m) = \varphi_p(l - m)$ とすると、この ρ は $\mathbb{Z}$ 上の距離関数となることを示せ.

(g) 自然数からなる数列 $\{x_1, x_2, ...\}$ 全体の集合を $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の任意の 2 元 $x = \{x_1, x_2, ...\}, y = \{y_1, y_2, ...\}$ に対して、

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1/n & x_i = y_i (i < n) \text{ で } x_n \neq y_n \text{ のとき、} \\ 0 & x_i = y_i (i \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

と定める. このとき、ρ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の距離関数となることを示せ.

問題 2 [開集合]

(X, d) を距離空間とする. X の任意の有限個の開集合の共通部分は開集合であることを示せ.

問題 3 [開集合]

(X, d) を距離空間とする. 任意個の開集合の和集合は開集合であることを示せ.

問題 4 [距離空間の開集合]

距離空間 (X, ρ) において、X の任意の 2 点 x, y に対し、

$$\tilde{\rho}(x, y) = \min(\rho(x, y), 1)$$

とおけば、$\tilde{\rho}$ は集合 X 上の距離関数であって、$A \subset X$ とするとき、

$$A \text{ は } (X, \rho) \text{ の開集合} \Leftrightarrow A \text{ は } (X, \tilde{\rho}) \text{ の開集合}$$

問題 5 [距離空間の開集合]

距離空間 (X, ρ) において、X の任意の 2 点 x, y に対し、

$$\tilde{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

とおけば、$\tilde{\rho}$ は集合 X 上の距離関数となり、$A \subset X$ とするとき、

$$A \text{ は } (X, \rho) \text{ の開集合} \Leftrightarrow A \text{ は } (X, \tilde{\rho}) \text{ の開集合}$$

問題 6 [距離関数となるための条件]

集合 X の任意の 2 元 x, y に対して、実数 $\rho(x, y) \geq 0$ が定められ、以下の性質を満たすとき、ρ は X 上の距離関数となることを示せ.

- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 任意の 3 元 x, y, z に対して $\rho(x, y) \leq \rho(z, x) + \rho(z, y)$ が成り立つ.

参考文献

集合と位相（内田伏一）裳華房.

位相空間の基礎概念（酒井克郎）Web で検索のこと.

位相空間論（森田紀一）絶版なので図書館にて探すこと.

Counterexamples in topology(Lynn Arthur Steen and J.Arthur Seebach Jr.)Dover.

トポロジーへの招待（寺澤順）日本評論社

URL: `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html`

blog: `http://motochans.blogspot.jp`

twitter ID: BasicMathIIB