

トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第13回 ('16年1月26日：Keywords・・・積位相、商位相、連結)

まとめ.

13-1. 積位相 1・・・位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ と $(X_2, \mathcal{O}_2)$ に対して、自然な射影を $p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ とする. このとき、

$$\{p_1^{-1}(H_1) \mid H_1 \in \mathcal{O}_1\} \cup \{p_2^{-1}(H_2) \mid H_2 \in \mathcal{O}_2\}$$

によって生成される位相を $X_1 \times X_2$ 上の積位相といい、 $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ とかく.

13-2. 積位相 2・・・ $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) を位相空間とする. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ において、射影を

$p_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ とする.

$$\cup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(H_\lambda) \mid H_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

によって生成される位相を $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上の積位相といい、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ とかく.

位相空間 X の可算個の積空間を $X^{\aleph_0}$ とかく.

13-3. 商位相・・・ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. $f : X \rightarrow Y$ が全射であり、 Y 上に

$$H \text{ が } Y \text{ の開集合} \Leftrightarrow f^{-1}(H) \text{ が } X \text{ の開集合} \quad (*)$$

となるように位相をいれたものを Y 上の f による商位相という.

13-4. 商写像・・・位相空間の間の全射 $f : (X, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}')$ で上の条件 $(*)$ を満たすものを商写像という.

13-5. 商空間・・・位相空間 X 上の同値関係 σ に対して σ による商集合 X/σ に対して自然な全射 $X \rightarrow X/\sigma$ による商位相を同値類集合 X/σ に入れる. このような X/σ 上の位相空間を商空間という.

13-6. 連結・・・位相空間 X に対して、ある2つの空ではない互いに素な開集合 U, V を使って、 $X = U \cup V$ とならないことである. 連結でない位相空間は不連結という.

13-7. 連結成分・・・位相空間 $(X, \mathcal{O})$ のうち、 x を含む最大の連結部分集合 $C(x)$ を連結成分という.

13-8. 完全不連結・・・任意の点 $x \in X$ において、 x を含む連結成分が x のみからなるもの.

問題 120 [積位相]

$X \times Y$ に対して B が $(x, y) \in X \times Y$ の近傍であるとは、ある $x \in X$ の開集合 U と $y \in Y$ の開集合 V が存在して、 $U \times V \subset B \subset X \times Y$ となることを示せ.

問題 121 [積位相]

積空間 $X \times Y$ において、 $A \subset X, B \subset Y$ とする. このとき以下を示せ.

$$(1) \text{Int}(A \times B) = \text{Int}(A) \times \text{Int}(B)$$

$$(2) \text{Bd}(A \times B) = [\text{Bd}(A) \times \text{Cl}(B)] \cup [\text{Cl}(A) \times \text{Bd}(B)]$$

問題 122 [積位相]

積空間 $X \times Y$ 上の点列 (x_n, y_n) が連続となるためには、 x_n, y_n が X, Y においてそれぞれ収束することであることを示せ.

問題 123 [積位相]

積空間 $X \times Y$ の積位相は各射影 $X \times Y \rightarrow X$ と $X \times Y \rightarrow Y$ が連続となる最弱の位相であることを示せ.

問題 124 [箱型積位相]

$(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ を位相空間とする. 積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上に、 $\left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^{-1}(H_\lambda) \mid H_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}$ を位相として定めることができる. これを箱型積位相という. 一般に、箱型積位相と通常の積位相とは異なる位相であることを示せ. ここで、 p_λ を積集合から X_λ への自然な射影とする.

問題 125 [射影]

積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ は連続な開写像であることを示せ.

問題 126 [積空間への写像]

$p_\lambda : X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ を積集合からの自然な射影とする. Z を位相空間とし、 $f : Z \rightarrow X$ を写像とするとき、 f が連続であるための必要十分条件は、任意の λ に対して $p_\lambda \circ f$ が連続であることを示せ.

問題 127 [距離空間の可算無限直積上の距離関数]

可算個の距離空間 (X_i, ρ_i) ($i = 1, 2, \dots$) に対して、 $\delta(X_i) \leq 1$ とする. このとき、積空間 $\prod_{i \geq 1} X_i$ と 2 点 $x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$ に対して、

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} [\rho_i(x_i, y_i)]}$$

とおくと、 ρ は積空間 $\prod_{i \geq 1} X_i$ 上の距離関数となり、 $\prod_{i \geq 1} X_i$ 上の積位相と一致する.

問題 128 [無理数とその連分数展開]

$(0, 1)$ 上の無理数全体からなる部分空間を $\mathbb{P}'$ とかく. $\mathbb{P}'$ は、連分数展開

$$\mathbb{P}' \ni \alpha = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}} \quad (n_i \in \mathbb{N})$$

を使って、 $(n_1, n_2, \dots)$ を対応させる. この写像は、 $\mathbb{P}'$ と自然数の可算直積空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}_0}$ と同相を与えることを示せ.

問題 129 [商写像となるためのある十分条件]

連続な全射 f が、開写像もしくは閉写像であるなら f は商写像であることを示せ.

問題 130 [商写像]

商写像は連続であることを示せ.

問題 131 [商写像]

X, Y, Z を位相空間とし、 $f : X \rightarrow Z, g : X \rightarrow Y, h : Y \rightarrow Z$ とし、 $f = h \circ g$ として以下を示せ.

- (1) g が商写像、 f が連続とするなら、 h は連続である.
- (2) g, h が商写像であるなら、 f は商写像である.
- (3) f が商写像、 g, h が連続であるなら、 f は商写像である.

問題 132 [連結]

X, Y を位相空間とし、連続 $f : X \rightarrow Y$ に対して、 X の連結な部分集合 A の像 $f(A)$ も連結であることを示せ.

問題 133 [連結部分集合の閉包の連結性]

連結な部分集合の閉包は連結であることを示せ.

問題 134 [直積空間の連結性]

連結な位相空間の直積は連結であることを示せ.

問題 135 [$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ の連結性]

実数全体 $\mathbb{R}$ は連結であることを示せ. また、有理数全体 $\mathbb{Q}$ は不連結であることを示せ.

問題 136 [連結]

位相空間 X 上の任意の 2 点がある連結部分集合に含まれるとき、 X は連結であることを示せ.

問題 137 [連結]

位相空間の各連結成分は閉集合であることを示せ.

問題 138 [完全不連結集合]

有理数全体は完全不連結であることを示せ.

Homepage: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html>

Blog: <http://motochans.blogspot.jp>

Twitter ID: BasicMathIIB