

# トポロジー入門演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第14回 ('16年2月5日 : Keywords ... 局所連結、連続体、コンパクト)

まとめ.

14-1. 局所連結 ...  $X$  を位相空間とし、任意の  $x \in X$  と、任意の近傍  $x \in U$  に対して、ある  $x$  の連結近傍  $V$  で  $V \subset U$  となるものが存在すること .

14-2. 局所弧状連結 ...  $X$  を位相空間とし、任意の  $x \in X$  と、任意の近傍  $x \in U$  に対して、ある  $x$  の弧状連結近傍  $V$  で  $V \subset U$  となるものが存在すること .

14-3. 連続体 ... 連結な、コンパクト距離空間のことを連続体という .

連続体は現在も活発に研究されている位相幾何学の一分野である (我が大学にも連続体の研究者はいます.)

<http://web.mst.edu/~continua/>

に未解決問題が載っているので考えてみると面白いかもしれない .

14-4. ペアノ連続体 ... 連結かつ局所連結な、コンパクト距離空間のことをペアノ連続体という .

14-5. Hahn-Mazurkiewicz の定理 ... 距離化可能空間が  $X$  ペアノ連続体であることと、 $I$  からの連続な全射が存在することは同値である .

14-6. コンパクト ... 位相空間  $X$  の任意の開被覆が有限の部分被覆をもつときをいう .

14-7. 有限交叉性 ...  $X$  の部分集合族  $\mathcal{A}$  がそのどの有限集合の共通部分が空にならないとき、 $\mathcal{A}$  は有限交叉性をもつという .

14-8. フィルター ... 位相空間  $X$  の部分集合族  $\mathcal{F}$  で以下を満たすものをフィルターという .

(i)  $U \in \mathcal{F}$  が  $U \subset K$  となる場合は、 $K \in \mathcal{F}$

(ii)  $\mathcal{F}$  の有限個の共通部分も  $\mathcal{F}$  の元である .

(iii)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$

フィルター  $\mathcal{F}$  を含むフィルターが  $\mathcal{F}$  しかないとき、 $\mathcal{F}$  はウルトラフィルターという .

14-9. ルベグ数 ... 距離空間の開被覆を  $B$  とする .  $\delta$  をある正の実数とする . 直径が  $\delta$  より小さい任意の部分集合はある  $B$  の元に含まれるとき、この  $\delta$  をルベグ数という .

**問題 139** [局所連結]

局所連結だが、連結でない空間をあげよ .

**問題 140** [局所連結]

局所連結であることと、すべて連結な開集合を開基とすることができることは同値であることを示せ .

**問題 141** [トポロジストのサイン曲線 1]

$\{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$  の閉包は連結であるが、弧状連結でないことを示せ .

**問題 142** [トポロジストのサイン曲線 2]

$\{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$  の閉包は連結であるが、局所連結でないことを示せ .

**問題 143** [連結性]

位相空間  $X$  が連結であるためには、連続な全射  $X \rightarrow \{0, 1\}$  が存在しないことが必要十分であることを示せ . ただし、 $\{0, 1\}$  には離散とする .

問題 144 [弧状連結であるが局所連結でない]

$$Y = \{(x, y) | x = 0, 1, 1/2, 1/3, \dots, ; 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 0) | 0 \leq x \leq 1\}$$

は弧状連結であるが、局所弧状連結ではないことを示せ。

問題 145 [商空間の連結性]

$A \subset X$  を稠密な部分集合とする。このとき、商空間  $X/A$  は連結であることを示せ。

問題 146 [商空間の連結性]

$X$  を連結な位相空間とする。  $A$  を  $X$  の連結集合とし、  $B$  を  $X - A$  の開集合でかつ閉集合とする。  $A \cup B$  は連結であることを証明せよ。

問題 147 [非ハウスドルフ空間上の点列]

非ハウスドルフ空間における点列  $\{a_n\}$  で  $a$  にも  $b$  にも収束するものを構成せよ。ただし、  $a \neq b$  とする。

問題 148 [コンパクト性]

$\mathbb{R}$  はコンパクトでないことを示せ。

問題 149 [コンパクト性]

$\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  はコンパクトであることを示せ。

問題 150 [ハウスドルフ空間]

ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ。

問題 151 [ルベグ数]

$(X, d)$  をコンパクト距離空間とする。このとき、ルベグ数として正の実数がとれることを示せ。

---

Homepage: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html>

Blog: <http://motochans.blogspot.jp>

Twitter ID: BasicMathIIB