トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第2回（'15年10月15日：Keywords $\cdots$ 開集合、閉集合、連続写像）

まとめ.

2-1. 開集合 ••• (X,ρ) を距離空間とする．部分集合 $A\subset X$ が開集合とは、任意の点 $p\in A$ に対して、$U(p;\epsilon)\subset A$ となる正の実数 ϵ が存在することである．

2-2. 閉集合 ••• 部分集合 $A\subset X$ は、開集合の補集合となるとき閉集合という．

2-3. 部分集合の距離、直径 •••

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)|x\in A,y\in B\},\ \delta(A)=\sup\{\rho(x,y)|x,y\in A\}$$

2-4. 互いに素 ••• $A,B\subset X$ が $A\cap B=\emptyset$ となるとき、互いに素という．

2-5. 集積点 ••• 距離空間 (X,ρ) において、$A\subset X$ とする．このとき、任意の正の数 ϵ に対して、$U(p;\epsilon)\cap(A-\{p\})\neq\emptyset$ となるような点 p を A の**集積点**という．A と A の集積点全体の和集合を $\mathrm{Cl}(A)$ とかく．これは、A の**閉包**、もしくは、**触点**ともいう．

2-6. 収束 ••• 距離空間 (X,ρ) の点列 $\{x_n\}$ が $x\in X$ に収束するとは、任意の $\epsilon>0$ に対して、ある n_0 が存在して、$n>n_0$ なるすべての n に対して、$d(x_n,x)<\epsilon$ となることをいう．

2-7. 内点、外点、境界点 ••• A の内点 p とは、ある $\epsilon>0$ が存在して、$U(p;\epsilon)\subset A$ となることをいう．A の外点 p とは、ある $\epsilon>0$ が存在して、$U(p;\epsilon)\subset A^c$ となることをいう．A の境界点 p とは、任意の $\epsilon>0$ に対して、$U(p;\epsilon)\cap A\neq\emptyset$ かつ $U(p;\epsilon)\cap A^c\neq\emptyset$ となることをいう．

2-8. 連続写像 ••• 距離空間の間の写像 $(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ に対して、x_0 で連続であるとは、任意の ϵ に対して、$d_1(x_0,x)<\delta$ となる任意の x は、$d_2(f(x_0),f(x))<\epsilon$ となるような δ が存在することである．

書き直せば、任意の $\epsilon>0$ に対して、

$$x\in U(x_0;\delta)\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0);\epsilon)$$

となるような δ が存在することである．

問題 7 [内点・境界点・外点]
境界点を上の定義だとすると、境界点は内点でも外点でない点であることを示せ．

問題 8 [不等式]
任意の実数 x,y に対して、$|x^n-y^n|\leq|x-y|\cdot(|x|+|y|)^{n-1}$ が成り立つことを示せ．

問題 9 [コーシーシュワルツの不等式]
$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\leq\sum_{i=1}^n x_i^2\sum_{i=1}^n y_i^2$ を示せ．

$\boxed{\text{問題 10}}$ [部分集合との距離]
距離空間 (X,d) とその部分集合 A において、$|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$ が成り立つことを示せ.
ヒント：ある $a \in A$ を使って、三角不等式を用いよ.

$\boxed{\text{問題 11}}$ [触点であるための必要十分条件]
$x \in A$ が A の触点であるための必要十分条件は、$d(x,A)=0$ となることであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 12}}$ [内点であるための必要十分条件]
$x \in A$ が A の内点であるための必要十分条件は、$d(x,A^c)>0$ となることであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 13}}$ [集積点・閉包・触点]
以下の問題に答えよ.

(a) $\mathbb{R}$ 上の区間、(a,b) の閉包は $[a,b]$ であることを示せ.

(b) $\mathbb{R}^2$ 上の区画、$(a,b)\times(c,d)$ の閉包は $[a,b]\times[c,d]$ であることを示せ.

(c) $\{1/n|n \in \mathbb{N}\}$ の集積点は 0 のみであることを示せ.

(d) $A=\{(1/m,1/n)|n,m \in \mathbb{Z}, n,m>0\} \subset \mathbb{R}^2$ を考える．$\mathbb{R}^2$ には通常の距離が入っているとして、A の集積点は、$(0,1/n),(1/m,0)$、および $(0,0)$ と一致することを示せ.
ヒント：触点であれば、A から距離零になる．つまり、いくらでも近い点が存在することを示せ.

(e) 有理数全体の閉包は実数全体であることを示せ.

(f) (X,d) を距離空間とする．部分集合 $A \subset X$ に対して収束する A の点列 x_n の収束点 x は A の触点であることを示せ.

$\boxed{\text{問題 14}}$ [連続写像]
次の写像 f が連続であることを示せ．ただし、$\mathbb{R}^n$ には普通のユークリッド距離が入っているとする．$C(I)$ 上の距離は $d(\phi,\psi)=\sup\{|\phi(x)-\psi(x)||x \in I\}$ とする.

(a) $f:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d)$ を $\varphi(x)=x^n$ とする．$\delta=\min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{(2|x|+1)^{n-1}}\right\}$ として考えてみよ.

(b) $f:(\mathbb{R}-\{0\},d)\to(\mathbb{R},d)$ を $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする.

(c) $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ を $f(x)=d(x,A)$ とする.

(d) $f:(C(I),d)\to\mathbb{R}:\ f(\phi)=\displaystyle\int_0^1 \phi(t)dt$

(e) 距離空間 (X,d) において、A,B を互いに素な空でない閉集合とする．このとき、

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

$\boxed{\text{問題 15}}$ [開集合]
２次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において、２つの距離を

$$d_1(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

$$d_2(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

とする．このとき、距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_1)$ と $(\mathbb{R}^2, d_2)$ の開集合全体は一致することを示せ．

$\boxed{\text{問題 16}}$ [閉集合の無限個の和集合]
閉集合の無限個の和集合が開集合となる例をあげよ．

$\boxed{\text{問題 17}}$ [開集合の無限個の共通部分]
開集合の無限個の共通部分が閉集合となる例をあげよ．

$\boxed{\text{問題 18}}$ [非アルキメデス距離関数]
ρ が X の非アルキメデス距離関数ならば、$U(p;\epsilon)$ は (X,ρ) の閉集合となることを示せ．

$\boxed{\text{問題 19}}$ [集合を含む最小の閉集合]
$A \subset X$ を部分集合とする．$\mathrm{Cl}(A)$ は A を含む最小の閉集合である．つまり、A を含む閉集合のすべての共通部分であることを示せ．

$\boxed{\text{問題 20}}$ [ϵ-近傍の閉包]
距離空間 (X,ρ) において、

$$\mathrm{Cl}(U(x;\epsilon)) \subset \{y \in X | \rho(x,y) \le \epsilon\}$$

を示し、等号が成立しない例をあげよ．

$\boxed{\text{問題 21}}$ [部分集合の距離と直径]
距離空間 (X,ρ) において、$A, B \subset X$ とするとき、以下を証明せよ．

(a) $\delta(A \cup B) \le \delta(A) + \rho(A,B) + \delta(B)$

(b) $\delta(Cl(A)) = \delta(A)$

URL: `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html`
blog: `http://motochans.blogspot.jp`
twitter ID: BasicMathIIB