

トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第3回 ('15年10月19日：Keywords・・・位相空間)

まとめ.

3-1. 位相空間・・・ X を集合とする. $\mathcal{O}$ を X の部分集合の族とする. 以下を満たす $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という.

[$\mathcal{O}_1$] 全体集合 X 、空集合 $\emptyset$ は $\mathcal{O}$ に属する.

[$\mathcal{O}_2$] 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $O_1, \dots, O_k \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_k \in \mathcal{O}$

[$\mathcal{O}_3$] $\{O_\lambda | \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}\}$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

3-2. 連続写像・・・ $f : (X_1, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{O}_2)$ が連続であるとは、任意の $U \in \mathcal{O}_2$ に対して、 $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_1$ であることをいう.

3-3. 有限補集合位相・・・ X を集合として $\mathcal{O} = \{U \subset X | U = \emptyset \text{ or } X - U : \text{有限集合}\}$ としたときに得られる位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を有限補集合位相という.

3-4. 順序位相・・・ $(X, \leq)$ を全順序集合とする. X 外の $\{\infty, -\infty\}$ をとり、任意の $x \in X$ に対して、 $-\infty < x < \infty$ となる順序を入れる. $\mathcal{O}_\leq = \{U \subset X | \forall x \in U, \exists a, b \in X \cup \{\pm\infty\} \text{ に対して、} x \in (a, b) \subset U\}$ とおく. このとき、 $(X, \mathcal{O}_\leq)$ は位相空間となる. この位相を順序位相という.

3-5. 同相な空間・・・ $(X_1, \mathcal{O}_1)$ と $(X_2, \mathcal{O}_2)$ を2つの位相空間とする. 全単射連続写像 $f : X_1 \rightarrow X_2$ が、 f^{-1} も連続であるとき、 f は同相写像であるという. もし、 X_1, X_2 に対して同相写像が存在するとき、 X_1, X_2 は同相であるという. 位相空間において、同相を同値とみなしたものを同相類という.

3-6. 離散位相・・・集合 X に対して、位相 $\mathcal{O}$ が X の部分集合全体であるとき、 $(X, \mathcal{O})$ を離散空間であるという.

3-7. 内部、集積点、閉包・・・位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 A の内点 $\text{Int}(A)$ 、集積点、閉包 $\text{Cl}(A)$ の定義は、距離空間における定義の ϵ -近傍を全て開集合に変えて定義すればよい. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において X での部分集合 A の内部を $\text{Int}_X(A)$ 、閉包を $\text{Cl}_X(A)$ をとかくこともある.

3-8. 近傍系・・・集合 X の各元 x に対して、 X の部分集合の空でない族 $\mathcal{U}(x)$ が定められるとき、 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x) | x \in X\}$ を X の近傍系という.

1. $U \in \mathcal{U}(x)$ ならば、 $x \in U$
2. $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ かつ $U_2 \in \mathcal{U}(x)$ ならば、 $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ となる $U_3 \in \mathcal{U}(x)$ が存在する.
3. $U \in \mathcal{U}(x)$ 、 $y \in U$ ならば、 $V \subset U$ を満たす $V \in \mathcal{U}(y)$ が存在する.

集合上に近傍系がさだめられるとき、ただひとつ X 上に位相を定めることができる.

問題 22 [位相空間]

次の問題に答えよ.

- (a) $\mathbb{R}$ 上の部分集合の族を $\mathcal{O} = \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\} \cap \{\emptyset\}$ とすると、 $(X, \mathcal{O})$ は位相空間になることを示せ.

- (b) 有限補集合位相が位相空間であることを確かめよ．
- (c) 順序位相 $(X, \mathcal{O}_{\leq})$ は位相空間となることを確かめよ．
- (d) $(X, \mathcal{O})$ が位相空間とする． $A \subset X$ を部分集合とする、 $\mathcal{O}_A$ を $\{A \cap U \mid U \in \mathcal{O}\}$ とするとき、 $(A, \mathcal{O}_A)$ は位相空間であることを確かめよ．
- (e) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする． A を X の任意の部分集合とする．このとき、 $\mathcal{O}(A) = \{A \cup O \mid O \in \mathcal{O}\} \cup \{\emptyset\}$ とする．このとき、 $\mathcal{O}(A)$ は X 上の位相空間であることを示せ．

問題 23 [位相の数]

次の集合の上に定義される位相の総数を求めよ．

- (a) $\{1, 2\}$
- (b) $\{1, 2, 3\}$

問題 24 [位相の数]

次の集合の上に定義される位相の同相類を求めよ．

- (a) $\{1, 2\}$
- (b) $\{1, 2, 3\}$

問題 25 [有限集合上の位相]

有限集合上の距離空間は離散空間であることを示せ．

問題 26 [離散空間]

位相空間 X が離散空間であるためには、一点集合がすべて開集合となることが必要十分であることを示せ．

問題 27 [半円と $\mathbb{R}$ の間の全単射]

半円を

$$S_+^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$$

として定義する．次の写像 $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を以下のように定義する． $y \in (-1, 1)$ とする． S_+^1 上の点 (x, y) に対して、原点と (x, y) を通る直線の傾きを $\varphi(y)$ として定義する．このとき $\varphi(y)$ 、また、その逆写像を計算せよ．

問題 28 [導集合]

位相空間 X の部分集合 A の集積点全体の集合を A の導集合といい、 A^d で表す． X が距離空間のとき、 A^d は閉集合であることを示し、また、 $A, A^d, (A^d)^d$ が全て違う例を作れ．

問題 29 [部分集合の内部]

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする． $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をその部分空間とする．すべての X の部分集合 A に対して $\text{Int}_X(A) \cap Y$ が Y の中で A の内部になることと Y が X の中で開集合であることは同値であることを示せ．

問題 30 [距離空間の間の連続写像と位相空間としての連続写像]

(X_1, d_1) および (X_2, d_2) を距離空間とし、 $\mathcal{O}_j$ を d_j によって定まる距離位相とする。写像 $f: X_1 \rightarrow X_2$ について、 f が距離空間 (X_1, d_1) から (X_2, d_2) への連続写像であることと、 f が位相空間 $(X_1, \mathcal{O}_1)$ から $(X_2, \mathcal{O}_2)$ への連続写像であることは、同等（同値）であることを確かめよ。

問題 31 [距離空間の ϵ -近傍系]

距離空間 (X, d) において、 $\mathcal{U}(x) = \{\{y \in X \mid d(y, x) < \epsilon\} \mid \epsilon > 0\}$ とすると、 $\{\mathcal{U}(x)\}$ は距離空間の近傍系であることを示せ。

問題 32 [2 点集合からなる位相空間から決まる順序集合]

X を任意の 2 点集合上の位相空間とする。 $x \in X$ に対して、 U_x を x を含む最小の開集合とする。任意の $x, y \in X$ において、 $y \in U_x$ となるとき、 $x \leq y$ と定義することで、 X 上の順序集合を明らかにせよ。

問題 33 [3 点集合からなる位相空間から決まる順序集合]

X を任意の 3 点集合上の位相空間とする。 $x \in X$ に対して、 U_x を x を含む最小の開集合とする。任意の $x, y \in X$ において、 $y \in U_x$ となるとき、 $x \leq y$ と定義することで、 X 上の順序集合を明らかにせよ。

Homepage: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html>

Blog: <http://motochans.blogspot.jp>

Twitter ID: BasicMathIIB