トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 5 回（'15 年 11 月 2 日：Keywords ⋯ 開基、可算公理）

まとめ.

5-1. 第 1 可算公理 ••• 各点において可算個の近傍基をもつような位相空間のこと.

5-2. 第 2 可算公理 ••• 可算個の開基をもつ位相空間のこと.

5-3. 可分 ••• 可算個の点の閉包からなる位相空間のこと．つまり、稠密な可算部分集合が存在すること.

問題 49 [可算公理、可分]

1. 第 2 可算公理を満足する位相空間は、第 1 可算公理を満足し、可分な位相空間であることを示せ.
2. $\mathbb{R}^n$ 上に通常の距離位相を入れた空間は可分な位相空間であることを示せ.
3. ヒルベルト空間 ℓ_1, ℓ_2 は可分であることを示せ.
4. ゾルゲンフライ直線 $\mathbb{S}$ は第 1 可算かつ可分であるが第 2 可算ではないことを示せ.

問題 50 [近傍系、近傍基]

$\{\mathcal{U}(x)|x \in X\}$ を位相空間 X の近傍系であるとする．このとき、$\mathcal{U}(x)$ は x んおける X の近傍基になることを示せ.

問題 51 [$\mathbb{R}$ 上の開集合]

通常の距離位相における $\mathbb{R}$ において、$[a,b)$ および、$[a,b]$ は開集合ではないことを示せ.

問題 52 [位相空間の生成]

$\mathbb{R}$ 上の通常の位相として、有限個の開集合によっては生成されないことを示せ.

問題 53 [$\mathbb{R}$ 上の開基]

$\mathbb{R}$ 上に存在する位相において、$\{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\} \cup \mathbb{Q}$ を開基とする位相は離散位相か？

問題 54 [p-進位相]

p-進距離によって定義された $\mathbb{Z}$ 上の位相における近傍基を求めよ.

問題 55 [下限位相の積空間]

$\mathbb{R}^2$ において

$$\mathcal{B} = \{[a,b) \times [c,d)|a,b,c,d \in \mathbb{R}; a < b, c < d\}$$

を開基とする位相空間をを $\mathbb{S}^2$ とする．次のことを示せ.

(1) 位相空間 $\mathbb{S}^2$ は第 1 可算公理を満足し、可分である.

(2) $\mathbb{S}^2$ の部分集合 $A = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2|x + y = 1\}$ の上の相対位相は離散位相である.

(3) $\mathbb{S}^2$ は第 2 可算公理を満足しない.

問題 56 [上限位相の連続性]

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ において、通常の距離位相を $\mathcal{O}$ で表し、上限位相を $\mathcal{O}_u$ で表す．写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

によって定義する．このとき、f が連続であるのは f の定義域の位相と値域の位相として、$\mathcal{O}$ もしくは $\mathcal{O}_u$ のどちらを選べばよいか？連続となる全ての場合を見つけよ.

$\boxed{\text{問題 57}}$ [離散位相の収束列]
離散空間 X において、点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束するためには、次の条件が必要十分であることを示せ.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x$$

$\boxed{\text{問題 58}}$ [収束する部分列]
$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ に $\mathbb{R}^2$ 上の通常の距離位相の相対位相から決まる位相を入れる．S^1 上の任意の点列 $\{x_n\}$ は収束する部分列を持つことを示せ.

Homepage: `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html`
Blog: `http://motochans.blogspot.jp`
Twitter ID: BasicMathIIB