トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第6回（'15 年 11 月 16 日：Keywords $\cdots$ 部分位相、相対位相）

まとめ.

6-1. 部分位相、相対位相 $\cdots$ 位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ とする．$Y \subset X$ を部分集合とする．このとき、Y の位相として、

$$\mathfrak{T} \cap Y = \{U \cap A | U \in \mathfrak{T}\}$$

とすることで、$(Y, \mathfrak{T} \cap Y)$ は位相空間とみなせる．この位相空間を $(X, \mathfrak{T})$ における Y の部分位相および、相対位相という．

問題 59 [部分位相]
上の部分位相が位相の定義を満たしていることを示せ．

問題 60 [$\mathbb{R}^2$ の部分位相としての $\mathbb{R}$]
$\mathbb{R}^2$ に通常の距離位相を入れる．このとき、部分集合 $\mathbb{R}$ を考える．

1. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して、開区間 (a, b) は $(a, b) = B \cap \mathbb{R}$ となるような $\mathbb{R}^2$ 上の開集合 $B \subset \mathbb{R}^2$ が存在することを示せ．
2. β を $\mathbb{R}^2$ 上の位相のある開基とする．このとき、$\beta \cap \mathbb{R} = \{B \cap \mathbb{R} | B \in \beta\}$ が $\mathbb{R}$ の通常の距離位相の開基になっていることを示せ．
3. $\mathbb{R}^2$ における $\mathbb{R}$ の相対位相は通常の $\mathbb{R}$ の距離位相であることを示せ．

問題 61 [実数と同相な空間]
$S^1_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$ と実数全体は同相であることを示せ．ただし、S^1_+ には $\mathbb{R}^2$ 上の通常の距離位相からくる相対位相が入っているとする．

問題 62 [位相の共通集合と和集合]
各 $\mathfrak{T}_a$ $(a \in \Omega)$ を集合 X の位相とするとき、$\cap_a \mathfrak{T}_a$ も X の位相となることを証明せよ．$\cup_a \mathfrak{T}_a$ についてはどうか？

問題 63 [閉包と境界点]
X を位相空間、$A, B \subset X$ とするとき、次の証明せよ．

1. $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subset \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$, $\mathrm{Cl}(A) - \mathrm{Cl}(B) \subset \mathrm{Cl}(A - B)$
2. $\mathrm{Bd}(A) \cap \mathrm{Bd}(B) = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}(A \cap B) = \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$

問題 64 [開集合の正則性]
位相空間 X の開集合 G は、$G = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(G))$ となるとき、正則という．次の問題に答えよ．

1. A が閉集合なら、$\mathrm{Int}(A)$ は正則である．
2. U, V が正則なら、$U \cap V$ も正則である．

問題 65 [位相空間の生成]
X を位相空間、$A \subset X$ とするとき、$\mathrm{Cl}(A) - A$ が閉集合となるためには、$A = G \cap F$ となる開集合 G と閉集合 F が存在することが必要十分であることを証明せよ．

問題 66 [$\mathbb{R}$ 上の開基]
A_i $(i = 1, ..., n)$ は位相空間 X の閉集合で、$X = \cup_i (A_i)$ とする．

$$G \text{ は } X \text{ の開集合} \Leftrightarrow G \cap A_i \text{ が部分空間 } A_i \text{ の開集合 } (1 \leq i \leq n)$$

を証明せよ．

$\boxed{\text{問題 67}}$ [開集合と部分空間の開集合]
X を位相空間、A を X の閉集合とする．U を部分空間 A の開集合 V を、$U \subset V$ を満たす X の開集合とすると、$U \cup (V - A)$ は X の開集合となることを証明せよ．

$\boxed{\text{問題 68}}$ [相対位相]
$A = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} | |x| > 1\}$ とし、$A \ni x$ に対し、

$$A \cap \{(a, b) \quad (a < x < b; a, b \in A)$$

を x の近傍として定まる A の位相は、実数空間 $\mathbb{R}$ の部分空間としての A の相対位相と異なることを証明せよ．

Homepage: `http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html`
Blog: `http://motochans.blogspot.jp`
Twitter ID: BasicMathIIB