トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第７回（'15 年 11 月 30 日：Keywords $\cdots$ 位相空間の連続写像）

まとめ.

7-1. 連続写像 $\bullet\bullet\bullet$ 位相空間 $(X,\mathfrak{T}_X)$、$(Y,\mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする．$\mathcal{U}(x)$ を X の点 x の近傍基、$\mathcal{V}(y)$ を Y の点 y の近傍基とする．写像 $f:X\to Y$ が $x_0\in X$ で連続であるとは、$y_0=f(x_0)$ の任意の近傍 $V(y_0)\in\mathcal{V}(y_0)$ に対し、

$$x\in U(x_0)\Rightarrow f(x)\in V(y_0)$$

となるような $U(x_0)\in\mathcal{U}(x_0)$ を定めることができることをいう．各点で連続であるような写像 f のことを連続写像という.

問題 69 [連続写像]
$(X,\mathfrak{T}_X)$, $(Y,\mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする．写像 $(X,\mathfrak{T}_X)\to(Y,\mathfrak{T}_Y)$ がある．次の条件は同値であることを示せ.

(1) f は $(X,\mathfrak{T}_X)$ から $(Y,\mathfrak{T}_Y)$ への連続写像である.

(2) Y の任意の開集合 H に対して $f^{-1}(H)$ が X の開集合である.

(3) Y の任意の閉集合 K に対して $f^{-1}(K)$ が X の閉集合である.

問題 70 [連続写像]
$(X,\mathfrak{T}_X)$, $(Y,\mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする．写像 $(X,\mathfrak{T}_X)\to(Y,\mathfrak{T}_Y)$ がある．次の条件は同値であることを示せ.

(1) f は $(X,\mathfrak{T}_X)$ から $(Y,\mathfrak{T}_Y)$ への連続写像である.

(2) $A\subset X$ に対し、$f(\mathrm{Cl}A)\subset\mathrm{Cl}f(A)$ ここで、Cl はそれぞれの位相空間における閉包である.

(3) Y の一つの開基 β に関する各開集合 W に対し、$f^{-1}(W)$ は X の開集合である.

問題 71 [部分空間の開基]
β を位相空間 $(X,\mathfrak{T})$ の開基とする．$\beta\cap Y=\{B\cap Y|B\in\beta\}$ は部分空間 $(Y,\mathfrak{T}\cap Y)$ の開基となることを示せ.

問題 72 [部分空間の閉包]
位相空間 $(X,\mathfrak{T})$ に対して、部分集合 $Y\subset X$ をとる．$A\subset Y$ に対して、$\mathrm{Cl}_Y(A)=Y\cap\mathrm{Cl}_X(A)$ が成り立つことを示せ.

問題 73 [閉包と境界点]
位相空間 $(X,\mathfrak{T})$ に対して、部分集合 $Y\subset X$ をとる．$A\subset Y$ に対して、$\mathrm{Int}_Y(A)=Y\cap\mathrm{Int}_X(A)$ や $\mathrm{Bd}_Y(A)=Y\cap\mathrm{Bd}_X(A)$ はかならずしも成り立たない．成り立たない例を挙げよ.

問題 74 [集積点]
位相空間 X において、次を示せ.

$$x\text{ が集積点 }\Leftrightarrow x\in\mathrm{Cl}(X-\{x\})$$

$\boxed{\text{問題 75}}$ [共通集合の閉包]
X を位相空間 $A \subset X$ とし、G は X の開集合であるとする．このとき、$\mathrm{Cl}(A \cap G) \supset \mathrm{Cl}(A) \cap G$ が成り立つことを示せ．特に、$A \cap G = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Cl}(A) \cap G = \emptyset$ を示せ．

$\boxed{\text{問題 76}}$ [G が開集合でない場合]
すぐ上の問題は、G が開集合でないと成り立たない．そのような例を挙げよ．

$\boxed{\text{問題 77}}$ [クラトウスキーの方法]
X を集合とする．X の各部分集合 A に対し X の部分集合 $u(A)$ を対応させる写像 $u : \rho(X) \to \rho(X)$（$\rho(X)$ は X のべき集合）があって A, B を X の任意の部分集合とするとき、次の４条件を満たすものとする．

(i) $A \subset u(A)$

(ii) $u(u(A)) = u(A)$

(iii) $u(A \cup B) = u(A) \cup u(B)$

(iv) $u(\emptyset) = \emptyset$

このとき、$\mathfrak{T} = \{X - A | A \in \rho(X), u(A) = A\}$ は X の一つの位相となり、この位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ における閉包 $\mathrm{Cl}(A)$ は $u(A)$ と一致する．

$\boxed{\text{問題 78}}$ [相対位相]
位相空間 $(X, \mathfrak{T})$ が近傍系 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}(x) | x \in X\}$ によって定められている場合、$y \in Y$ に対して、

$$\mathcal{U}(y) \cap Y = \{U \cap Y | U \in \mathcal{U}(y)\}$$

とおけば、$\mathcal{V} = \{\mathcal{U}(y) \cap Y | y \in Y\}$ は Y の近傍系となり、この近傍の定める Y の位相は $\mathfrak{T}$ によって定められる Y 上の相対位相と一致することを示せ．

Homepage: http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html
Blog: http://motochans.blogspot.jp
Twitter ID: BasicMathIIB