

トポロジー入門演習

担当 丹下 基生：研究室 (D506) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第8回 ('15年12月7日：Keywords・・・開写像・閉写像)

まとめ.

8-1. 開写像・・・写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して、任意の開集合 $U \subset X$ に対してその像 $f(U)$ も開集合となるもののこと.

8-2. 閉写像・・・写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して、任意の閉集合 $F \subset X$ に対してその像 $f(F)$ も閉集合となるもののこと.

8-3. 埋蔵写像 (埋め込み写像)・・・ $f : X \rightarrow Y$ が単射連続写像であり、 Y の部分空間 $f(X) \subset Y$ において、 $f : X \rightarrow f(X)$ が同相写像となるときをいう.

問題 79 [連続写像]

つぎの条件は同値であることを示せ.

- (1) $X \rightarrow Y$ は連続である.
- (2) 任意の $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(\text{Int}(B)) \subset \text{Int}(f^{-1}(B))$.
- (3) 任意の $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(\text{Cl}(B)) \supset \text{Cl}(f^{-1}(B))$.

問題 80 [連続写像]

つぎの条件は同値であることを示せ.

- (1) $X \rightarrow Y$ は連続である.
- (2) 任意の $B \subset Y$ に対して $\text{Bd}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\text{Bd}(B))$.

問題 81 [関数空間上の連続関数]

距離空間 $(C(I), d)$ ($d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in I\}$) において、 $f \in C(I)$ に対して、

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

とおけば、 $\varphi : C(I) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続写像であることを示せ.

問題 82 [収束点列]

$f : X \rightarrow Y$ が連続ならば、 X の任意の収束点列 $\{x_n\}$ に対し、 $\{f(x_n)\}$ は Y の収束点列となることを証明せよ.

問題 83 [ある非可算集合上の位相 I]

X を非可算集合とする. $x_0 \in X$ に対して、 x_0 の近傍を $x_0 \in U$ となる $U \subset X$ であり、 $X - U$ が可算集合となるものだけを考える. また、 $x \neq x_0$ なる $x \in X$ においては、 $\{x\}$ だけを近傍とする. このような近傍系をとると、 X 上に位相を定義できることを示せ.

問題 84 [ある非可算集合上の位相 II]

上のような位相空間 X において、 $A = X - \{x_0\}$ は x_0 の集積点であるが、 x_0 とは異なる点よりなる点列 $\{a_n\}$ は決して x_0 に収束しないことを示せ.

問題 85 [ある非可算集合上の位相 III]

X を上のように定義された位相空間とする. Y を X 上に離散位相を与えた位相空間とする. $f : X \rightarrow Y$ を恒等写像とする. この f は、この3つ前の問題の逆は成り立っているといえるか?

問題 86 [開写像]

$f: X \rightarrow Y$ が開写像であるためには、任意の $B \subset Y$ に対し、 $f^{-1}(\text{Cl}(B)) \subset \text{Cl}(f^{-1}(B))$ となることが必要十分であることを証明せよ。

問題 87 [閉写像]

$f: X \rightarrow Y$ が閉写像であるためには、 X の任意の開集合 U に対し、 $\{y \in Y | f^{-1}(y) \subset U\}$ が Y の開集合となることを必要十分であることを証明せよ。

問題 88 [開写像]

$f: X \rightarrow Y$ は全射、 $\varphi: X \rightarrow I = [0, 1]$ は連続写像とする。写像 $\psi: Y \rightarrow I$ を $\psi(y) = \inf\{\varphi(x) | x \in f^{-1}(y)\}$ で定めると、

f が開写像ならば、 $\psi^{-1}([0, r))$ は Y の開集合。

を示せ。

問題 89 [閉写像]

$f: X \rightarrow Y$ は全射、 $\varphi: X \rightarrow I = [0, 1]$ は連続写像とする。写像 $\psi: Y \rightarrow I$ を $\psi(y) = \inf\{\varphi(x) | x \in f^{-1}(y)\}$ で定めると、

f が閉写像ならば、 $\psi^{-1}((r, 1])$ は Y の開集合。

を示せ。

問題 90 [開写像かつ閉写像]

$f: X \rightarrow Y$ は全射、 $\varphi: X \rightarrow I = [0, 1]$ は連続写像とする。写像 $\psi: Y \rightarrow I$ を $\psi(y) = \inf\{\varphi(x) | x \in f^{-1}(y)\}$ で定めると、

f が開写像かつ閉写像ならば、 ψ は連続。

を示せ。

問題 91 [埋蔵写像となるための条件]

写像 $f: (X, \rho) \rightarrow (Y, \rho')$ が、 $\rho'(f(x), f(x')) = \rho(x, x')$ ($x, x' \in X$) を満たすならば、 f は埋蔵写像となることを示せ。

問題 92 [開写像かつ閉写像]

$a \in I$ に対し、 $f_a \in C(I)$ を $f_a(t) = a$ ($t \in I$) と定めるとき、 $\varphi: I \rightarrow (C(I), d); \varphi: a \mapsto f_a$ は埋蔵となることを示せ。

Homepage: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/15/top.html>

Blog: <http://motochans.blogspot.jp>

Twitter ID: BasicMathIIB