

微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第1回 ('16年10月5日：Keywords・・・春学期の復習、内点・外点・境界点)

1-1. テイラー展開・・・関数 $f(x)$ を多項式で近似する方法．原点でのテイラー展開をマクローリン展開という． $x = a$ でのテイラー展開の公式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

例えば e^x や $\sin x$ のマクローリン展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

汎用性が高いのは、次のべき関数のマクローリン展開です．これは2項定理の拡張にもなっています．

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2 \cdot 1}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

ここで、 a は任意の実数で代入可能です．また、 $a = -1$ のときは、 $|x| < 1$ のとき、

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

となります．

1-2. 積分・・・

1. 有理数の積分・・・(教科書 P.96) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ のとき、 $P(x)$ が $Q(x)$ より次数が大きい場合、 $P(x)$ を $Q(x)$ で割っておく．また、 $P(x)$ の次数が $Q(x)$ の次数より小さい場合、有理関数を部分分数に分解をすることで、分母を $(x-a)^n$ の形に帰着させて計算する．

2. 無理関数の積分・・・(教科書 P.102) $\sqrt{x^2+a}$ の形をもつ積分． $x^2+a=t$ において置換すると、うまく計算できる． $\sqrt{a-x^2}$ ($a > 0$) の形をもつ積分の場合、 $\sqrt{a}$ で割ってやり、 $x/\sqrt{a} = \sin t$ とおくことで、三角関数の積分に帰着される．

1-3. 内点・・・集合 S の内点 p とは、ある $\epsilon > 0$ があって、 ϵ -近傍 $U_\epsilon(p)$ が $p \in U_\epsilon(p) \subset S$ となること． S の内点全体を $\overset{\circ}{S}$ とかく． $S = \overset{\circ}{S}$ となる集合 S を開集合という．

1-4. 外点・・・集合 S の外点 p とは、ある $\epsilon > 0$ があって、 ϵ -近傍 $U_\epsilon(p)$ が $p \in U_\epsilon(p) \cap S = \emptyset$ となること．外点とは、補集合の内点全体のことである．

1-5. 境界点・・・集合 S の境界点 p とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して、 ϵ -近傍 $U_\epsilon(p)$ が $U_\epsilon(p) \cap S \neq \emptyset$ かつ、 $U_\epsilon(p) \cap S^c \neq \emptyset$ となること． ∂S とかく． $\partial S \subset S$ のとき、 S は閉集合という．

ホームページ：<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bischem.html>

blog：<http://motoshans.blogspot.jp/>

Twitter: BasicMathIIB

学籍番号

氏名

例題 1-1. (春学期の復習 (マクローリン展開、積分))

以下の問題を解け .

1. 次の関数をマクローリン展開せよ (また、結果だけでなく計算式もかけ .)

$$(1) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

2. $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ を $n, !, !!$ などを用いて表せ .

3. 次の定積分および広義積分を計算せよ .

$$(1) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin x}$$

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$$

例題 1-2. (内点・外点・境界点)

$(0, 1)$ を実数上の $0 < x < 1$ を満たす区間とする．このとき、 $(0, 1)$ は実数上開集合であることを示し、その境界点は $0, 1$ であることを示めせ．

学籍番号

氏名

問題 1-1. (春学期の復習)

- (1) 次の関数のテイラー展開をし、一般の n 次の項を求めよ .

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

- (2) 次の積分を計算せよ .

(a) $\int_0^1 \frac{(x+1) dx}{x^2+1}$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{28} x dx$

問題 1-2. (内点・外点・境界点)

半径 1 の円を

$$B = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$

として定義する．このとき、 B は開集合であり、 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ が境界点であることをしめせ．