微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 10 回 （'17 年 1 月 18 日：Keywords $\cdots$ 広義重積分、ガンマ関数、ベータ関数)

10-1. 広義重積分 ••• 教科書 p207 の広義積分の定理をここで復習しておく．
Ω を平面内の可測集合 Ω, $f(x,y)$ は Ω で定義された非負値をとる関数とする．Ω の可測な取り尽くし列 $\{K_n\}$ であって、関数 $f(x,y)$ が各 K_n 上で積分可能かつ

$$\sup_n \int\int_{K_n} f(x,y)dxdy < \infty$$

となるものが存在するとき、関数 $f(x,y)$ は Ω 上で広義積分可能という．あるいは広義積分は収束するという．このとき、

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \sup_n \int\int_{K_n} f(x,y)dxdy$$

とおいて、関数 $f(x,y)$ の Ω 上の広義積分という．特に、$f(x,y) \equiv 1$ の場合の広義積分を Ω の面積といい、$\mu(\Omega), |\Omega|$ と表す．

$$\mu(\Omega) = |\Omega| = \int\int_{\Omega} dxdy$$

10-2. ガンマ関数、ベータ関数 ••• ガンマ関数、ベータ関数の定義式を書いておく．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

ホームページ：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bischem.html`
blog：`http://motochans.blogspot.jp/`
Twitter: BasicMathIIB

微積分 II 演習 第 10 回

2017 年 1 月 18 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

例題 10-1. (積分)
次の積分を求めよ.

(1) (a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$　　　(b) $\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-x^2}dx$　　　(c) $\Gamma(3)$

(2) 次の等式を証明せよ. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0)$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^4\theta d\theta$ の値を問題 10-1(2) を用い、さらに問題 10-2 の解答となる $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を用いて、もっとも簡単な形に変形せよ.

$\boxed{\text{例題 10-2.}}$ ($\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ の積分値)

$$D(a) = \{(x,y)|0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$$
$$E(a) = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq a^2, 0 \leq x, 0 \leq y\}$$

とおく．以下の問題に答えよ.

(1) $D(a), E(a)$ がどのような図形であるか平面上に図示せよ.

(2) $E(a) \subset D(a) \subset E(\sqrt{2}a)$ であることを図を用いて確かめよ.

(3) $\displaystyle\int\int_{D(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy, \int\int_{E(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy$ をそれぞれ計算せよ．ただし前半の計算は、$\displaystyle\int_0^a e^{-x^2}dx$ の項が残ってもよいとする.

(4) (2),(3) を用いて積分値 $\displaystyle\int\int_{D(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy, \int\int_{E(a)} e^{-x^2-y^2}dxdy, \int\int_{E(\sqrt{2}a)} e^{-x^2-y^2}dxdy$ の間の関係式から導かれる不等式を作れ.

(5) (4) の不等式から、$a \to \infty$ とすることで、$\displaystyle\left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2$ はどのような値に近づくか？

(6) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ の値を求めよ.

微積分 II 演習 第 10 回

提出締め切り 2017 年 1 月 25 日 (13:50 まで)

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 10-1. (Γ 関数、ベータ関数の表示)

(1) 次の等式を示せ.

(a) $\Gamma(p) = 2\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2p-1} dx$

(b) $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$

(c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を示せ．ただし、$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを使ってよい.

(2) $x^4 = t$ とおくことで、積分 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ をガンマ関数、もしくはベータ関数によって表せ.

$\boxed{\textbf{問題 10-2.}}$ (ベータ関数とガンマ関数の関係式)

$$D'(a) = \{(x, y) | 0 < x \le a, 0 < y \le a\}$$
$$E'(a) = \{(x, y) | x^2 + y^2 \le a^2, 0 < x, 0 \le y\}$$

とおき、関数 $f(x, y)$ を $4e^{-x^2-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}$ となる関数とする．以下の問題に答えよ．

(1) $D'(a), E'(a)$ がどのような図形であるか図示し、$E'(a) \subset D'(a) \subset E'(\sqrt{2}a)$ であることを図を用いて確かめよ．

(2) $\displaystyle\int\int_{D'(a)} f(x, y)dxdy$ を x, y の変数をそれぞれ分離した形にせよ．

(3) $\displaystyle\int\int_{E'(a)} f(x, y)dxdy$ を原点を中心とした極座標 (r, θ) を用いて変換し、r, θ の関数のそれぞれの積分に分解した形にせよ．

(4)
$$\int\int_{E'(a)} f(x, y)dxdy \le \int\int_{D'(a)} f(x, y)dxdy \le \int\int_{E'(\sqrt{2}a)} f(x, y)dxdy$$
の不等式と、$a \to \infty$ となるときの、最左辺と最右辺が近づく値を考慮することで、$\Gamma(p+q), \Gamma(p), \Gamma(q), B(p, q)$ の間にどのような関係が成り立つか？