微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 11 回 ('17 年 1 月 25 日：Keywords $\cdots n$ 次元球体の体積)

11-1. 極座標表示 ••• $\mathbb{R}^n$ の極座標表示は、

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ \cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

として与えておくことができる．ただし、

$$\begin{cases} 0 \le r \\ 0 \le \theta_i \le \pi & (1 \le i \le n-2) \\ 0 \le \theta_{n-1} \le 2\pi \end{cases}$$

を満たす．この極座標表示のヤコビアンは、

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(\sin\theta_i)^{n-i-1}$$

と計算できる.

11-2. S^n(n 次元球面) •••

$$S^n(r) = \{(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = r^2\}$$

なる集合を n 次元球面という.

11-3. B^n(n 次元球体) •••

$$B^n(r) = \{(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le r^2\}$$

なる集合を n 次元球体という.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bischem.html
blog：http://motochans.blogspot.jp/
Twitter: BasicMathIIB

微積分 II 演習 第 11 回

2017 年 1 月 25 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　氏名

例題 11-1. ($\sin^n\theta$ の積分)
以下の問題に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta d\theta$ をベータ関数の公式を用い、ガンマ関数を使って表せ.

(2) この公式から、n が偶数の場合、奇数の場合、具体的に 2 重階乗や π を用いて表せ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr$ を Γ 関数を用いて表せ.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n\theta d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta d\theta$ であることを示せ.

例題 11-2. ($B^2(r), B^3(r)$ の公式)

(1) $B^2(r)$ の体積 (面積) を以下のようにして求めよ.

  (a) $B^2(r)$ は関数 $f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ で囲まれる部分の体積であることを、図を描いて確認せよ.

  (b) 積分を実行し、$B^2(r)$ の面積を計算せよ.

(2) 2 変数関数 $\pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ で囲まれた図形の重積分を実行することで、$B^3(r)$ の体積を求めよ.

微積分 II 演習 第 11 回

提出締め切り 2017 年 2 月 1 日 (13:50 まで)

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

$\boxed{\textbf{問題 11-1.}}$ (Γ 関数、ベータ関数の表示)

(1) 次の広義積分の等式を証明せよ.

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2} = \pi$$

(2) 次の等式を示せ. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}d\theta = \pi$ であることを示せ.

$\boxed{\textbf{問題 11-2.}}$ ($B^4(r)$ の体積)

以下、$n = 4$ もしくは $n = 5$ として計算を行え.

(1) 極座標表示のパラメータ表示を使って、ヤコビアンの定義から、$\mathbb{R}^n$ 上の極座標表示のヤコビアン $\dfrac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})}$ を求めよ.

(2) 上のヤコビアンを用いることで、$B^n(r)$ の n 次元体積が $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n$ を満たすことを示せ.

(Hint: n 次元の極座標表示では、$0 \leq \theta_i \leq \pi$ $(1 \leq i \leq n-2)$, $0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ であることに注意せよ.)

(3) $n = 5$ として、同じことを行え.