微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第12回 ('17年2月1日：Keywords ⋯ 曲面積)

12-1. 曲面積 ••• C^1 級曲面 $\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in D\}$ の部分の面積は、

$$\int\int_D \sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}dxdy$$

として計算できる.

(例) 円柱 $y^2+z^2=a^2$ の $x^2+y^2=a^2$ の内部にある部分の表面積.

$z=f(x,y)=\sqrt{a^2-y^2}$ として、$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$ として、$\int_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy$ を計算する.

12-2. 回転体の体積 ••• C^1 級曲線 $y=f(x)\ \ (a\le x\le b)$ を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積は

$$\pi\int_a^b f(x)^2dx$$

として計算できる.

12-3. 回転体の表面積 ••• C^1 級曲線 $y=f(x)\ \ (a\le x\le b)$ を x 軸の周りに回転してできる回転体の表面積は

$$2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

として計算できる.

ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bischem.html
blog：http://motochans.blogspot.jp/
Twitter: BasicMathIIB

微積分 II 演習 第 12 回

2017 年 2 月 1 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　氏名

例題 12-1. (円錐の表面積と球の表面積)

(1) 次のような円錐の表面積を求めよ.

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (x^2 + y^2 \leq a^2)$$

(2) 半径が 1 の球面 S の表面積を求めよ.

(a) $y = \sqrt{1 - x^2}$ を x 軸に沿って回転してできる回転体として、S の表面積を求めよ.

(b) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ の表面積を表面積の公式を使って S の表面積を求めよ.

例題 12-2. (曲面積)

次の曲面の曲面積を求めよ.

(1) $z = x^2 + y^2 \quad (x^2 + y^2 \leq r^2)$

(2) $z = xy \quad (x^2 + y^2 \leq r^2)$

(3) $y = \sin x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ を x 軸の周りに回転した図形.

(4) $y = \sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq 1)$ を x 軸の周りに回転した図形.

微積分 II 演習 第 12 回

提出締め切り 2017 年 2 月 7 日 (レポートボックス)

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

問題 12-1. (回転体の表面積)

(1) 回転体 $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ の表面積の公式を以下のようにして導く.

(a) $y = f(x)$ を x 軸の周りに回転させてできる x, y, z-空間内の図形のパラメータ表示を回転角 θ を用いて求めよ．ただし、$z = f(x)\sin\theta$ とする.

(b) この回転体を x, y 平面上の関数 $z = h(x, y)$ としたとき、$h(x, y)$ を f, x, y を用いて表せ.

(c) この曲面が表す関数が存在する領域を求めよ.

(d) 曲面積の公式を用いて、この回転体の表面積を求めよ．ただし、y を先に積分することで、12.3 の公式の形にせよ.

(2) 次の回転体の体積と表面積を求めよ．カテナリー $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ を x 軸の周りに回転した図形.

問題 12-2. (球面が円柱によって切り取られる部分の面積)

半球面 $x^2+y^2+z^2=1 \quad (z \geq 0)$ のうち、円柱 $x^2+y^2 \leq x$ によって切り取られる部分の表面積 S を求める.

(1) 求める表面積のこの大体の概形を描け.

(2) x, y 平面のどのような領域の重積分を考えればよいか？

(3) S を求めよ.