

## 微積分II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

### 第13回 ('17年2月8日：Keywords・・・模擬定期テスト)

#### 問題 13-1. (全微分可能)

関数  $z = f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で全微分可能であることの定義を与えよ．また、その定義に基づいて、 $z = xy$  が各点で全微分可能であることを示せ．

#### 問題 13-2. (合成関数の微分法)

(1) 次の関数の合成関数  $f(x(t), y(t))$  の  $t$  の微分を  $f(x, y)$  の偏微分を用いて求めよ．

$$f(x, y), x(t) = 2e^{t^2}, y(t) = te^t$$

(2) 関数  $z = 3x^2 + 5y^2 + x + y$  の  $(x, y) = (a, b)$  での接平面を求めよ．

#### 問題 13-3. (極値問題, ラグランジュの未定乗数法)

(1) 次の関数の極値を取る点があれば求め、それが、極大か極小か判定せよ．また極値の値を求めよ．

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x + y$$

(2)  $x^2 + 2y^2 = 1$  を満たす実数上で、 $xy$  を最大もしくは最小にする  $(x, y)$  と、その値を求めよ．

#### 問題 13-4. (積分法)

次の重積分を求めよ．

(1)

$$\int \int_D (x^2 + xy) dx dy, \quad D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -x/2 \leq y \leq 2x\}$$

(2)

$$\int \int_D \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

#### 問題 13-5. (ベータ関数)

次の積分をガンマ関数を用いて表し、ガンマ関数の性質を用いて値を求めよ．

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

必要なら、 $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  を用いてもよい．

(略解)

問題 13-1

関数  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  において、全微分可能であるとは、

$$f(x, y) = f(a, b) + \alpha(x - a) + \beta(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2})$$

を見たような、 $\alpha, \beta$  が存在することである。

$x - a = r \cos \theta, y - b = r \sin \theta$  とする。  $\frac{xy - b(x - a) - a(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = \frac{(x - a)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = r(\cos \theta \sin \theta)$  であるから、

$$\left| \frac{xy - b(x - a) - a(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} \right| \leq r |\cos \theta \sin \theta| \leq r \rightarrow 0$$

がなりたち、 $(x, y) \rightarrow (a, b)$  において、

$$f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + o(\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2})$$

が成り立つ。よって、 $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で全微分可能である。

問題 13-2

(1)  $\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t) = f_x(2e^{t^2}, te^t)2e^{t^2}2t + f_y(2e^{t^2}, te^t)(e^t + te^t)$

(2) 接平面の方程式は、 $z = 3a^2 + 5b^2 + a + b + (6a + 1)(x - a) + (10b + 1)(y - b)$  が接平面の方程式である。さらに簡単にすると、 $z = (6a + 1)x + (10b + 1)y - 3a^2 - 5b^2$  となる。

問題 13-3

(1)  $f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0$  の方程式をとくと、 $(x, y) = (1, -1)$  が得られる。このとき、ヘッセ行列は、 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  となり、この行列の行列式は 3 であるから、この関数は、この点で極値をもつ、さらに、 $f_{xx}(1, -1) = 2$  であるから、この極値は、極小値であることがわかる。特に、その点は、 $f(1, -1) = -1$  となる。

(2)  $H = xy - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$  において、 $H$  の臨界点を求める。つまり、
$$\begin{cases} H_x = y - 2x\lambda = 0 \\ H_y = x - 2y\lambda = 0 \\ H_\lambda = -x^2 - 2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$
 を満たす  $(x, y, \lambda)$  を探すと、 $\lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$  となり、それに応じて、 $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2}), (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{2})$  が得られる。よって、そのとき、 $f$  の値は、 $f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  であり、 $f(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$  を満たし、それぞれ、最大と最小となる。

問題 13-4

(1)  $\int_0^1 \int_{-x/2}^{2x} (x^2 + xy) dy dx = \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_{-x/2}^{2x} dx = \int_0^1 (x^2(2x + x/2) + \frac{x(4x^2 - x^2/4)}{2}) dx =$

$$\frac{35}{8} \int_0^1 x^3 dx = \frac{35}{8} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{35}{32}$$

(2) 極座標変換を用いて、

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{1 + r^2}} r dr d\theta$$

となる。よって、 $1 + r^2 = s$  とおくと、 $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 (s - 1) s^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} (2 - \sqrt{2}) = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2})$

問題 13-5 積分を  $x^4 = t$  として置換すると、 $\frac{1}{4} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{-\frac{1}{2}} dt$  とかけるので、ベータ関数を用いて表すと、 $\frac{1}{4} B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})^2}{1} = \frac{\pi}{8}$