微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 14 回（'17 年 2 月 15 日：Keywords ⋯ 定期テスト）

問題 14-1. (全微分可能)
関数 $z = f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能であることの定義を与えよ．また、その定義に基づいて、$f(x,y)=\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ が原点で全微分可能であることを示せ．ただし、$f(0,0)=0$ と定義しておく．

問題 14-2. (合成関数の微分法)

(1) 次の関数の合成関数 $f(x(u,v),y(u,v))$ の u に関する偏微分、v に関する偏微分を求めよ．$f(x,y)=e^x2^y$, $x(u,v)=uv, y(u,v)=u^2+v^2$

(2) 関数 $z=\log(x^2+y^2-xy)$ の $(x,y)=(1,1)$ での接平面の方程式を求めよ．

問題 14-3. (極値問題)
次の関数の極値を取る点があれば求め、それが、極大か極小か判定せよ．また極値の値を求めよ．

$$f(x,y)=x^4+2y^2-4xy$$

問題 14-4. (積分法)

次の重積分を求めよ．

$$\int\int_D \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy, \quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$$

問題 14-5. ($\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ の値)
積分値

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \cdots(*)$$

を以下のようにして求める．下の $\boxed{ア}$〜$\boxed{ケ}$ に当てはまる数、もしくは文字式を答えよ．ただし必要があれば、ガンマ関数の定義 $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$ を用いても良い．

$(*)$ の左辺は $s=\boxed{ア}$ と置換することによって、ガンマ関数 $\dfrac{1}{2}\Gamma(\boxed{イ})$ に直すことができる．このガンマ関数の値を求めればよいが、ベータ関数の公式を使うと、$\dfrac{\Gamma(\boxed{イ})\Gamma(\boxed{イ})}{\Gamma(\boxed{ウ})}=B(\boxed{エ},\boxed{エ})$ となる．ベータ関数の定義式 $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ を用いて、$B(\boxed{エ},\boxed{エ})$ を書きかえると、$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\boxed{オ}}}dt$ なる積分になる．この積分を $t=\sin^{\boxed{カ}}x$ として置換すると、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boxed{キ}dx$ となる．これを計算することで、$B(\boxed{エ},\boxed{エ})=\boxed{ク}$ となる．よって $\Gamma(\boxed{イ})=\boxed{ケ}$ となり、$(*)$ の式が成り立つ．