微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 2 回（'16 年 10 月 12 日：Keywords ··· 多変数関数の連続性

2-1. 多変数関数の連続性 ••• 多変数関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での連続性

$$f(a,b)=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

(x,y) が (a,b) に任意に近づくとき、$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ は 0 に収束する．これを用いて多変数の連続性について議論する.

(例 1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(|x|+|y|)}{x^2+y^2}$ の極限値を求めよ.
$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおく．このとき、$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする．$(x,y)\to(0,0)$ ならば、$r\to 0$ なので、

$$\left|\frac{xy(|x|+|y|)}{x^2+y^2}\right|=\frac{|r^2\cos\theta\sin\theta(r(|\cos\theta|+|\sin\theta|))|}{r}$$

$$=r^2|\cos\theta\sin\theta|(|\cos\theta|+|\sin\theta|)\le r^2(1+1)=2r^2\to 0$$

よって、$(x,y)\to(0,0)$ において、$\dfrac{xy(|x|+|y|)}{x^2+y^2}\to 0$ となります.

(例 2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ の原点の近くでの関数の振る舞い方を調べよ.

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと、$f(x,y)=\cos\theta\sin\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$ となり、近づき方によって、$-\dfrac{1}{2}$ から $\dfrac{1}{2}$ の全ての値を取りうる．特に、この関数は原点で連続ではない.

2-2. ランダウの記号 ••• 関数 $f(x),h(x)$ に対して、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)/h(x)=0$ となるとき、

$$f(x)=o(h(x))\ \ (x\to a)$$

とかく．多変数関数の場合においても同じ定義をする．ある関数 $f(x,y),h(x,y)$ が $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)/h(x,y)=0$ となるとき、

$$f(x,y)=o(h(x,y))\ \ (x,y)\to(a,b)$$

とかく.
つまり、極限において関数 f は h と比べてかなり小さいことを意味しています．かなり小さいとは、その極限においてその比が 0 に収束することを意味しています.

(例) 上の関数の極限値を用いて、$xy(|x|+|y|)=o(x^2+y^2)\ \ (x,y)\to(0,0)$ となることを示せ.

（参考：http://motochans.blogspot.jp/2014/10/blog-post_13.html（ランダウの記号））
ホームページ：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/16/bischem.html
blog：http://motochans.blogspot.jp/
Twitter: BasicMathIIB

微積分 II 演習 第 2 回

2016 年 10 月 5 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

例題 2-1. (極限値)

次の極限は原点に近づき方によってどのように変化するか？

(1) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　　　(2) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

例題 2-2. (多変数関数の連続性と極値)

(1) 次の関数の極限値は存在するか？もし存在すれば、極値を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^5}{x^2+y^3}$

(2) 次の極限を求めよ.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(\cos(xy))}{x^2+y^2}$

微積分 II 演習 第 2 回

提出 2016 年 10 月 26 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 2-1. (多変数の極限)

(1) 次の関数の値は、原点への近づき方によってどのように変化するか？

$$f(x,y) = \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(2) 次の極限値は存在するか？存在する場合は証明をし、しない場合はその理由を答えよ.

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　　　(b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y^2)}{x^2+y^2}$

問題 2-2. (ランダウの記号について)
次のランダウの記号の等式 $x^3 + y^3 = o((x^2 + y^2)^{\frac{n}{2}})$ $(x, y) \to (0, 0)$ は以下のいずれの場合が正しいか？正しいものを全て答えよ.

(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$ (d) $n \geq 4$