微積分II演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第3回（'16年10月26日：Keywords $\cdots$ 接平面、合成関数の微分法)

3-1. 偏微分可能 $\cdots$ $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ において、x で偏微分可能であるとは、$f(x,b)$ が一変数関数として微分可能であることをいう．y に関する微分可能性も同じようにする．

3-2. 偏微分係数、偏導関数 $\cdots$ $f(x,y)$ の $(x,y)=(a,b)$ での x に関する偏微分の微分係数を $f_x(a,b)$ もしくは、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ とかく．これは、関数のグラフ $z=f(x,y)$ を $y=b$ に制限してできる関数 $z=f(x,b)$ の微分係数である．また、関数を $f_x(x,y)$ を偏導関数という．また $(f_x)_x(x,y)$ のような高次の偏導関数を $f_{xx}(x,y)$ もしくは $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ や $(f_x)_y(x,y)=f_{xy}(x,y)$ もしくは $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ とかく．

(例) 偏導関数を求める．

(1) $f(x,y)=xe^{xy}$ のとき、$f_x(x,y)=e^{xy}+xe^{xy}y=(1+xy)e^{xy}, f_y(x,y)=x^2e^{xy}$

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ のとき、$f_x(x,y)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, f_y(x,y)=\dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

3-3. 接平面の方程式 $\cdots$ 関数 $z=f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とする．このとき、

$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})\ \ (x,y)\to(a,b)$

を満たすが、最後の項を取り除いて (**一次近似**)、

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b) \qquad \text{(接平面の方程式)}$$

$$\Leftrightarrow f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$

となる (x,y,z) の方程式（接平面の方程式）が得られる．

(例) 次の関数 $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求める．

$f(x,y)=xy$ のとき、$z=b(x-a)+a(x-b)+ab$ もしくは、$b(x-a)+a(y-b)-z+ab=0$ が接平面の方程式、

3-4. 合成関数の微分法 I $\cdots$ (x,y)-平面上に、$(x(t),y(t))$ をおく．このとき合成関数 $F(t)=f(x(t),y(t))$ の $t=t_0$ での微分は、

$$\frac{dF}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))\cdot\frac{dx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))\cdot\frac{dy}{dt}(t_0)$$

つまり

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

となる．

(例) 関数 $f(x,y)$ に $(x,y)=(t^2,t^3)$ として合成関数 $f(t^2,t^3)=F(t)$ を定義する．このとき、$F'(t)=f_x(t^2,t^3)2t+f_y(t^2,t^3)3t$ となる．実際、$f(x,y)=5x+3y$ とすると、$F'(t)=10t+9t=19t$ となる．

3-5. 合成関数の微分法 II ••• 関数 $z = f(x,y)$ と、$x = \varphi(s,t), y = \psi(s,t)$ に対して、$z = F(s,t) = f(\varphi(s,t), \psi(s,t))$ とすると、次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial s} & \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial s} & \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{pmatrix}$$

この後ろの 2×2 行列の行列式をヤコビアンといい、$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ とかく.

(例)2 変数関数を $f(x,y) = 5x + 3y$ とし、$x(s,t) = e^{st}, y(s,t) = e^{s+2t}$ を代入したとき、$F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ の s,t での偏微分を計算する．$F_s(s,t) = 3te^{st} + 5e^{s+2t}, F_t(s,t) = 3se^{st} + 10e^{s+2t}$ となる.

微積分 II 演習 第 3 回

2016 年 10 月 26 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

例題 3-1. (接平面の方程式、合成関数の微分法 I)

(1) 次の関数の $(x, y) = (a, b)$ での接平面を求めなさい

(1) $f(x, y) = e^{xy}$　　　　(2) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$

(2) 関数 $f(x, y)$ と $x = x(t), y = y(t)$ の合成関数 $F(t)$ の微分を、合成関数の微分法を使って求めよ.

(a) $f(x, y)$, $x = 2t + 1, y = t^2$　　　　(b) $f(x, y)$, $x = \sin t, y = \cos t$

$\boxed{\textbf{例題 3-2.}}$ (合成関数の微分法 I,II)

(1) 例題3-1(2) の合成関数において、$f(x,y)$ が次の関数であるとき、$F'(t)$ を求めよ.

(a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ (b) $f(x,y) = x^3 + y^3$

(2) 次の関数の s,t での偏微分を f_x や f_y を用いて求めよ.

$$F(s,t) = f(\cos(s+t), \sin(s-t))$$

また、$f(x,y) = xy$ であるとき、F_s, F_t を求めよ.

微積分 II 演習 第 3 回

提出 2016 年 11 月 9 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 3-1. (接平面の方程式、合成関数の微分法)
以下の問題に答えよ.

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ の (a, b) での接平面の方程式を求めよ.

(2) $f(x, y) = x^5 + y^5$ とし、$x(\theta) = \cos\theta, y(\theta) = \sin\theta$ であるとき、この合成関数 $F(\theta) = f(x(\theta), y(\theta))$ の θ での微分係数を求めよ.

(3) 次の関数を合成した関数 $f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v)$ の u, v に関する偏微分を合成関数の微分法を用いて計算せよ.

(a) $f(x, y) = xy^2 + x^2y, x = u + v, y = u - v$

(b) $f(x, y) = \sin(x - y), x = u^2 + v^2, y = 2uv$

$\boxed{\textbf{問題 3-2.}}$ (合成関数の微分法)
次の関数

$$F(t) = t^{2^t}$$

の t 微分を合成関数の微分法を使って以下のようにして求める.

(1) まず、$F(t)$ は、t を 2^t 乗する関数つまり、$t^{(2^t)}$ であるが、それは、t^2 を t 乗する関数 $(t^2)^t$ ではないことを示せ. たとえば、$3^{(2^3)}$ は $(3^2)^3$ とは違う値であることを示せ.

(2) $f(x, y) = x^y$ として、$F(t)$ を合成関数の形 $f(x(t), y(t))$ にしたとき、x, y をどのようにしたら適切か？

(3) このとき f_x, f_y および、$x'(t)$, $y'(t)$ を求めよ.

(4) $F'(t)$ を求めよ.