微積分 II 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 4 回（'16 年 11 月 9 日：Keywords ··· テイラーの定理・極値)

4-1.n 回連続微分可能 ••• $f(x,y)$ を x,y で、n 回微分可能であり、すべての n 回導関数が連続であるとき、$f(x,y)$ を n 回連続微分可能 (もしくは C^n 級関数) という.

4-2. テイラーの定理 ••• n 回連続微分可能な関数 $z = f(x,y)$ に対して、(a,b) でのテイラー展開を以下のようにして求める．$h = x-a, k = y-b$ とし一変数関数 $F(t) = f(a+th, b+tk)$ にテイラーの定理を用いる．$0 < \theta < 1$ が存在して、

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F'''(0)}{3!} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\theta)}{n!}$$

となる．合成関数の微分法を使って f の式にすると、

$$f(x,y) = f(a,b) + (Df)(a,b) + \frac{(D^2f)(a,b)}{2!} + \cdots + \frac{(D^{n-1}f)(a,b)}{(n-1)!} + \frac{(D^nf)(a+\theta h, b+\theta k)}{n!}$$

となる．ただし $D = h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y}$ である．また、各項は、

$$F^{(m)}(0) = D^m f(a,b) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} h^l k^{m-l} f^{(l,m-l)}(a,b)$$

となる．ここで、$f^{(p,q)}$ は $f(x,y)$ を p 回 x により偏微分し、q 回 y で偏微分した偏導関数.

4-3. 関数の２次近似 ••• 2 回連続微分可能であれば、関数のテイラー展開の 2 次までの項は、

$$f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2)$$

となる．これを関数の 2 次近似という．ここで、$h = x-a$、$k = y-b$ である．
(例)$f(x,y) = e^{x+y}$ の $(0,0)$ での２次までのテイラー展開（２次近似）を求めよ．
$f_x(0,0) = 1, f_y(0,0) = 1, f_{xx}(0,0) = 1, f_{xy}(0,0) = 1, f_{yy}(0,0) = 1$ なので、テイラー展開は、$1 + x + y + \dfrac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \dfrac{D^3 f(\theta x, \theta y)}{3!}$ となり、２次近似は、$1 + x + y + \dfrac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)$ となる.

4-4. 極大点、極小点、臨界点 ••• 関数 $z = f(x,y)$ が (a,b) において**極大点**であるとは、ある (a,b) の ϵ-近傍 $B_\epsilon(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\}$ が存在して、$^\forall(x,y) \in B_\epsilon(a,b)$ に対して以下を満たすこと.

$$f(x,y) < f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) \neq (a,b)$$

また、(a,b) が**極小点**であるとは、ある ϵ が存在して、$^\forall(x,y) \in B_\epsilon(a,b)$ に対して以下を満たすこと.

$$f(x,y) > f(a,b) \Leftrightarrow (x,y) \neq (a,b)$$

教科書ではこの不等号にイコールが入った形だが、この定義は狭義の極値である.
関数が (a,b) において極大点（もしくは、極小点）であり、偏微分可能であれば、

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つ．また、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点 (a,b) のことを**臨界点**もしくは**停留点**という．
(例)$f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ の $f_x(a,b) = f_b(a,b) = 0$ となる点を求めよ．
$f_x(a,b) = f_b(a,b) = 0$ を解くと、$(a,b) = (0,0), (-1,-1)$ となる．

4-5. 極値問題 ••• $f(x,y)$ を C^2 級関数とし、(a,b) において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ が成り立つとする．このとき、関数の２次近似は、

$$z = f(a,b) + \frac{1}{2}(f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}(a,b)k^2)$$

となり、２次の部分の係数を並べて対称行列

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

を定義する．これをヘッセ行列という．その行列式が $\det(H(a,b)) \neq 0$ を仮定する．このとき、臨界点 (a,b) は、

$$\begin{cases} \det(H(a,b)) > 0 \text{ かつ } f_{xx}(a,b) > 0 & \Leftrightarrow \text{極小点} \\ \det(H(a,b)) > 0 \text{ かつ } f_{xx}(a,b) < 0 & \Leftrightarrow \text{極大点} \\ \det(H(a,b)) < 0 & \Leftrightarrow \text{鞍点} \end{cases}$$

であることがわかる．
$\det(H(a,b)) \neq 0$ かつ $f_{xx}(a,b) = 0$（もしくは $f_{yy}(a,b) = 0$）であるなら、$\det(H(a,b)) < 0$ であることに注意せよ．$\det(H(a,b))$ をヘッシアンという．

微積分 II 演習 第 4 回

2016 年 11 月 9 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

例題 4-1. (停留点 (臨界点) を求める)

次の関数の $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = \dfrac{2}{3}y^3 + y^2 - x^2y + x^2$　　(2) $f(x,y) = xy(1-2x-3y)$

(3) $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$

例題 4-2. （2次近似（ヘッセ行列））

(1) $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$ の臨界点でのヘッセ行列を求め、極値かどうか判断せよ.

(2) **例題 4-1.**(1),(2) で求めた点 (a,b) において、ヘッセ行列を求め、極値を求めよ.

微積分 II 演習 第 4 回

提出 2016 年 11 月 16 日

学籍番号　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題 4-1. (2 次近似式と極値判定)
次の問題に答えよ.

(1) 次の関数の $(1,1)$ での 2 次近似式を求めよ．ただし、$h = x - 1$、$k = y - 1$ とする.

$$f(x,y) = xy\log(x^2 + y^2)$$

(2) **例題 4-1.**(3) の関数において、$\det(H) \neq 0$ となる点は、極値かどうか判定せよ.

$\boxed{\textbf{問題 4-2.}}$ (極値判定)

以下の関数 $f(x,y)$ について以下を調べよ．

$$f(x,y) = x^4 + y^2 + 2x^2 - 4xy + 1$$

(1) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる点をすべて求めよ．

(2) 上の各点 (a,b) においてヘッセ行列を H とする．このとき、$\det(H) \neq 0$ となる点はどれか？計算することにより求めよ．

(3) (2) の点において極値となる点はどれか？

(4) (3) の点のうち、極大値 (極大を与える値) と極小値 (極小を与える値) を求めよ．